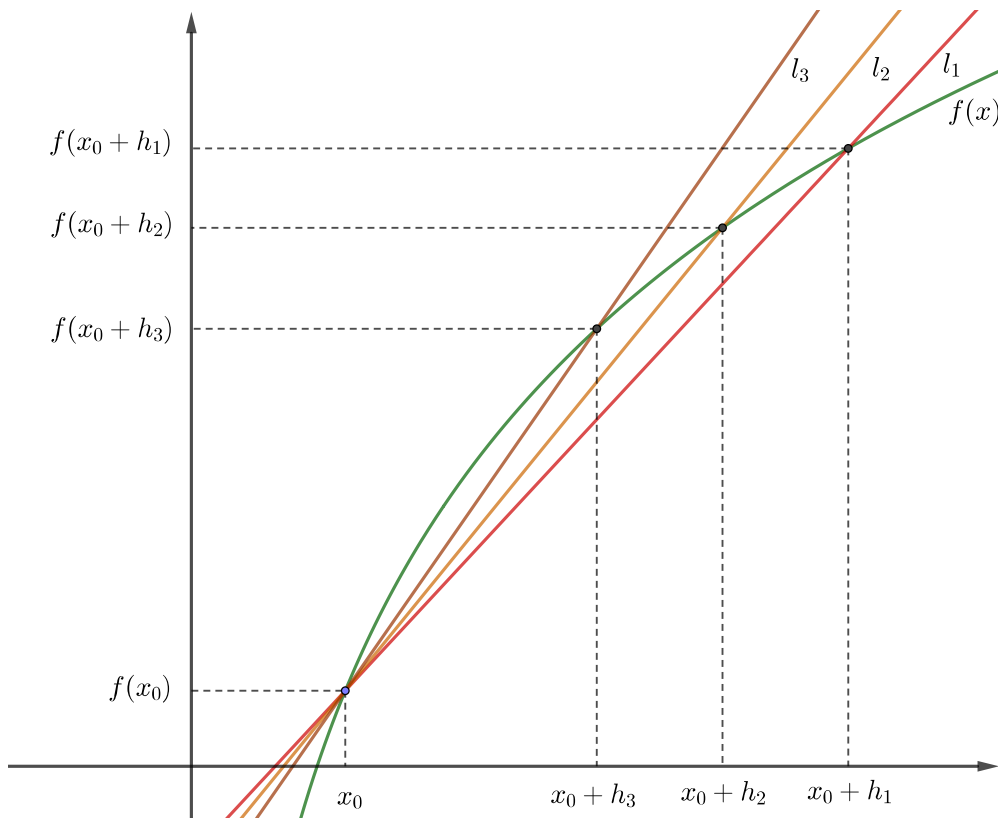


# Giáo trình Vi tích phân 1C

Bộ môn Giải tích (Khoa Toán–Tin học, Đại học Khoa học Tự nhiên Thành phố Hồ Chí Minh)

Bản ngày 19 tháng 8 năm 2018



Đây là giáo trình cho các môn toán Vi tích phân 1 cho khối C do Bộ môn Giải tích (Khoa Toán-Tin học, Đại học Khoa học Tự nhiên Thành phố Hồ Chí Minh) chủ trì biên soạn.

- Tham gia biên soạn: Vũ Đỗ Huy Cường, Lý Kim Hà, Nguyễn Vũ Huy, Bùi Lê Trọng Thanh, Nguyễn Thị Thu Vân, Huỳnh Quang Vũ
- Tham gia biên tập LaTeX: Hồ Thị Kim Vân
- Tham gia vẽ hình: Nguyễn Hoàng Hải
- Người biên tập hiện nay: Huỳnh Quang Vũ. Liên hệ: [hqv@hcmus.edu.vn](mailto:hqv@hcmus.edu.vn)

Trang web Tài liệu hỗ trợ môn học của Bộ môn Giải tích có ở:  
<http://www.math.hcmus.edu.vn/giaitich>  
Đây là bản thảo, đang được tiếp tục chỉnh sửa bổ sung.

# Mục lục

<b>1</b>	<b>Số thực và Hàm số thực</b>	<b>1</b>
1.1	Số thực . . . . .	1
1.1.1	Tập hợp và ánh xạ . . . . .	1
1.1.2	Vài quy tắc suy luận toán học . . . . .	3
1.1.3	Tập hợp các số thực . . . . .	5
1.1.4	Dãy số thực . . . . .	7
1.2	Hàm số . . . . .	12
1.2.1	Hàm số sơ cấp . . . . .	12
1.2.2	Đồ thị. Đường thẳng . . . . .	14
<b>2</b>	<b>Hàm số liên tục</b>	<b>16</b>
2.1	Giới hạn của hàm số . . . . .	16
2.1.1	Tiếp tuyến. Vận tốc. Tỷ lệ thay đổi . . . . .	16
2.1.2	Giới hạn của hàm số . . . . .	19
2.1.3	Một số tính chất căn bản của giới hạn . . . . .	22
2.1.4	Các giới hạn mở rộng . . . . .	24
2.2	Hàm số liên tục . . . . .	30
2.2.1	Tính chất của hàm số liên tục . . . . .	31
2.2.2	Định lý giá trị trung gian . . . . .	33
<b>3</b>	<b>Phép tính vi phân</b>	<b>38</b>
3.1	Đạo hàm và các tính chất . . . . .	38
3.1.1	Định nghĩa đạo hàm . . . . .	38
3.1.2	Tính chất của đạo hàm . . . . .	42
3.2	Các công thức cho đạo hàm . . . . .	45
3.2.1	Đạo hàm của hàm hợp . . . . .	45
3.2.2	Đạo hàm của hàm ngược . . . . .	47
3.2.3	Đạo hàm của hàm sơ cấp . . . . .	47
3.2.4	Đạo hàm của hàm ẩn . . . . .	50
3.2.5	Đạo hàm bậc cao . . . . .	50
<b>4</b>	<b>Ứng dụng của đạo hàm</b>	<b>53</b>
4.1	Cực trị của hàm số . . . . .	53
4.1.1	Sự tồn tại giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất . . . . .	56
4.1.2	Các định lý giá trị trung bình . . . . .	57
4.2	Đạo hàm và tính chất của hàm . . . . .	60
4.2.1	Tính tăng, giảm, và cực trị . . . . .	60
4.2.2	Tính lồi, lõm, và điểm uốn . . . . .	62
4.2.3	Xấp xỉ tuyến tính . . . . .	65

4.2.4	Qui tắc l'Hôpital và ứng dụng trong tính giới hạn . . . . .	66
<b>5</b>	<b>Phép tính tích phân</b>	<b>74</b>
5.1	Định nghĩa và tính chất của tích phân . . . . .	74
5.1.1	Bài toán diện tích . . . . .	74
5.1.2	Định nghĩa tích phân . . . . .	74
5.1.3	Các tính chất của tích phân . . . . .	76
5.2	Định lý Cơ bản của phép tính vi tích phân . . . . .	77
5.2.1	Nguyên hàm . . . . .	77
5.2.2	Công thức Newton-Leibniz . . . . .	79
5.3	Một số phương pháp biến đổi tích phân . . . . .	82
5.3.1	Phép đổi biến trong tích phân . . . . .	82
5.3.2	Tích phân từng phần . . . . .	84
5.3.3	Một số phương pháp tính tích phân cho các hàm đặc biệt . . . . .	85
5.3.4	Sự tồn tại công thức cho tích phân . . . . .	88
5.3.5	Tính tích phân bằng phương pháp số . . . . .	89
5.3.6	Tích phân suy rộng . . . . .	90
5.4	Ứng dụng của tích phân . . . . .	96
5.4.1	Diện tích, thể tích . . . . .	96
5.4.2	Giá trị trung bình . . . . .	97
5.4.3	Một số ứng dụng trong khoa học . . . . .	98
5.4.4	Xác suất . . . . .	99
<b>6</b>	<b>Chuỗi</b>	<b>105</b>
6.1	Tiếp theo về Dãy số thực . . . . .	105
6.2	Chuỗi số thực . . . . .	108
6.2.1	Sự hội tụ của chuỗi số . . . . .	108
6.2.2	Chuỗi số dương . . . . .	110
6.2.3	Chuỗi đan dấu . . . . .	114
6.3	Chuỗi Taylor và chuỗi Maclaurin . . . . .	116
<b>7</b>	<b>Phương trình vi phân</b>	<b>122</b>
7.1	Phương trình vi phân và mô hình toán học . . . . .	122
7.1.1	Mô hình với phương trình vi phân . . . . .	124
7.2	Giải phương trình vi phân cấp một . . . . .	127
7.2.1	Phương trình vi phân cấp một tách biến . . . . .	127
7.2.2	Phương trình vi phân cấp một đẳng cấp . . . . .	130
7.2.3	Phương trình vi phân cấp một tuyến tính . . . . .	131
	<b>Tài liệu tham khảo</b>	<b>139</b>

# Chương 1

## Số thực và Hàm số thực

### 1.1 Số thực

#### 1.1.1 Tập hợp và ánh xạ

Trong toán học hiện nay, tập hợp được coi là một trong những khái niệm ban đầu, từ đó dùng một số qui tắc suy luận nhất định người ta xây dựng các kết quả trong toán học. Có những lý thuyết sâu sắc hơn về tập hợp và về các tập hợp cơ sở như tập hợp các số tự nhiên, tập hợp các số thực, nhưng ở môn học này chúng ta không thảo luận chúng mà chỉ thừa nhận và sử dụng một số tính chất của chúng mà phù hợp với kinh nghiệm của đa số người.

Chúng ta có thể hiểu một tập hợp là một sự ghép nhóm các đối tượng có tính chất chung nào đó. Các đối tượng đó gọi là các phần tử của tập hợp đang xét.

Người ta thường dùng các chữ cái in hoa như  $A, B, C, X, Y, Z, \dots$  để chỉ các tập hợp và thường dùng các chữ cái in thường như  $a, b, c, x, y, z, \dots$  để chỉ các phần tử trong tập hợp. Nếu  $x$  là phần tử thuộc  $A$ , ta kí hiệu  $x \in A$  và đọc là “ $x$  thuộc  $A$ ”. Nếu  $x$  không là phần tử của  $A$  ta kí hiệu là  $x \notin A$  và đọc là “ $x$  không thuộc  $A$ ”.

Tập hợp không chứa phần tử nào được gọi là **tập hợp rỗng**, kí hiệu là  $\emptyset$ .

Để mô tả một tập hợp người ta thường dùng hai phương pháp sau:

- (a) Liệt kê các phần tử của tập hợp đó. Ví dụ nếu tập hợp  $A$  chứa đúng 4 phần tử  $x, y, z$  và  $t$ , thì ta viết  $A = \{x, y, z, t\}$ . Hay tập hợp  $B$  gồm các ngày trong tuần được viết là

$$B = \{\text{thứ hai, thứ ba, thứ tư, thứ năm, thứ sáu, thứ bảy, chủ nhật}\}.$$

Phương pháp này thường được dùng để mô tả các tập hợp có ít phần tử.

- (b) Chỉ ra những tính chất mà mọi phần tử của tập hợp đó đều có. Giả sử tập hợp  $A$  chứa các phần tử có cùng tính chất  $\mathcal{P}$ . Ta viết

$$A = \{x \mid \mathcal{P}(x)\}.$$

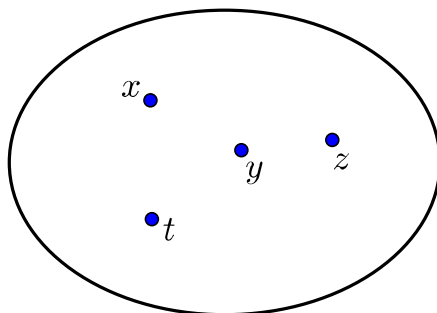
Ví dụ tập hợp  $C$  gồm các sinh viên năm nhất là nam có thể được viết là:

$$C = \{\text{sinh viên năm nhất} \mid \text{sinh viên là nam}\}.$$

Phương pháp này thường dùng để mô tả các tập hợp có nhiều phần tử.

Để biểu diễn một tập hợp một cách trực quan ta có thể dùng biểu đồ.

Nếu mọi phần tử của tập  $A$  cũng là phần tử của tập  $B$  thì ta nói  $A$  là tập con của  $B$  và kí hiệu  $A \subset B$ .



Hình 1.1.1: Biểu đồ biểu diễn tập hợp chứa 4 phần tử.

**Ví dụ 1.1.1.** Cho  $A = \{x, y, z\}$  và  $B = \{x, y, z, t\}$  thì  $A \subset B$ .

Nếu mỗi phần tử của tập hợp  $A$  đều thuộc về tập hợp  $B$  và ngược lại, mỗi phần tử của tập hợp  $B$  đều thuộc về tập hợp  $A$  thì ta nói  $A$  và  $B$  bằng nhau hay trùng nhau, kí hiệu  $A = B$ .

## Các phép toán trên tập hợp

**Hợp** (hay hội) của hai tập  $A$  và  $B$  là tập hợp gồm tất cả các phần tử của  $A$  hoặc của  $B$ , kí hiệu  $A \cup B$ . Vậy  $x \in A \cup B \iff (x \in A \text{ hoặc } x \in B)$ .

**Ví dụ 1.1.2.** Cho  $A = \{a, b, x, z\}$  và  $B = \{a, c, x, y\}$  thì  $A \cup B = \{a, b, c, x, y, z\}$ .

**Giao** của hai tập  $A$  và  $B$  là tập hợp gồm tất cả các phần tử của  $A$  mà cũng là phần tử của  $B$ , kí hiệu  $A \cap B$ . Vậy  $x \in A \cap B \iff (x \in A \text{ và } x \in B)$ .

**Ví dụ 1.1.3.** Cho  $A = \{a, b, x, z\}$  và  $B = \{a, c, x, y\}$  thì  $A \cap B = \{a, x\}$ .

**Hiệu** của tập  $A$  và tập  $B$  là tập gồm tất cả các phần tử của  $A$  mà không thuộc  $B$ , kí hiệu  $A \setminus B$ . Vậy  $A \setminus B \iff (x \in A \text{ và } x \notin B)$ .

**Ví dụ 1.1.4.** Cho  $A = \{a, b, x, z\}$  và  $B = \{a, c, x, y\}$  thì  $A \setminus B = \{b, z\}$ .

Nếu  $A \subset E$  thì  $E \setminus A$  được gọi là **phần bù** của  $A$  trong  $E$ .

**Ví dụ 1.1.5.** Cho  $A = \{a, b, x, z\}$  và  $E = \{a, b, c, x, y, z\}$  thì  $E \setminus A = \{c, y\}$ .

**Tích** của tập hợp  $A$  với tập hợp  $B$  là tập hợp gồm tất cả các cặp có thứ tự  $(x, y)$  với  $x \in A$  và  $y \in B$ , kí hiệu  $A \times B$ .

## Ánh xạ

Cho  $X$  và  $Y$  là hai tập hợp khác rỗng. Một **ánh xạ**  $f$  từ  $X$  đến  $Y$  là một quy tắc cho tương ứng mỗi phần tử  $x \in X$  với một phần tử duy nhất  $y$  của  $Y$ .

Người ta thường ký hiệu ánh xạ từ  $X$  đến  $Y$  là  $f : X \rightarrow Y, x \mapsto y = f(x)$ . Tập  $X$  gọi là tập hợp nguồn, hay **miền xác định** của ánh xạ, tập  $Y$  gọi là tập hợp đích của ánh xạ. Phần tử  $y$  được gọi là ảnh của  $x$  và phần tử  $x$  được gọi là một nghịch ảnh (hay tiền ảnh) của  $y$ .

Cho  $A$  là tập con bất kì của  $X$ , tập hợp tất cả các ảnh của các phần tử của  $A$  qua ánh xạ  $f$  được gọi là ảnh của  $A$  qua  $f$ , là tập  $f(A) = \{y \in Y \mid y = f(x), x \in A\}$ .

Ảnh của miền xác định  $X$  được gọi là **miền giá trị** của ánh xạ  $f$  và được ký hiệu bởi  $f(X) = \text{Im}(f)$ .

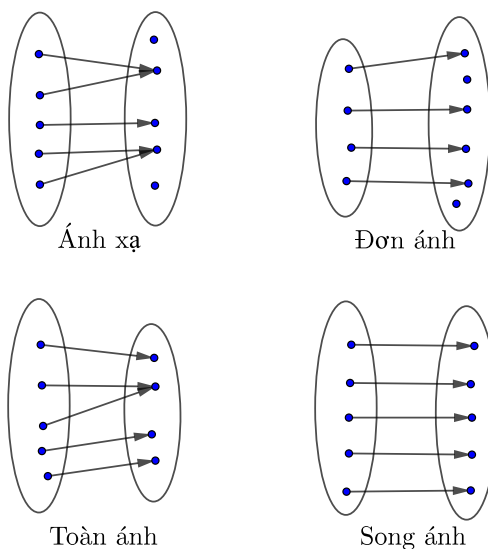
Cho  $B$  là tập con bất kì của  $Y$ , ta gọi tập hợp các nghịch ảnh của các phần tử trong  $B$  qua ánh xạ  $f$  là nghịch ảnh của  $B$  qua  $f$  và được xác định bởi

$$f^{-1}(B) = \{x \in X \mid f(x) \in B\}.$$

Ánh xạ  $f : X \rightarrow Y$  được gọi là một **đơn ánh** nếu với mọi  $x_1, x_2 \in X, x_1 \neq x_2$  thì  $f(x_1) \neq f(x_2)$ , nghĩa là hai phần tử nguồn khác nhau sẽ cho hai ảnh khác nhau.

Ánh xạ  $f : X \rightarrow Y$  được gọi là một **toàn ánh** nếu  $\forall y \in Y$  đều  $\exists x \in X$  sao cho  $y = f(x)$ . Hay nói cách khác  $f(X) = Y$ .

Ánh xạ  $f : X \rightarrow Y$  được gọi là một **song ánh** nếu nó vừa là một đơn ánh vừa là một toàn ánh.

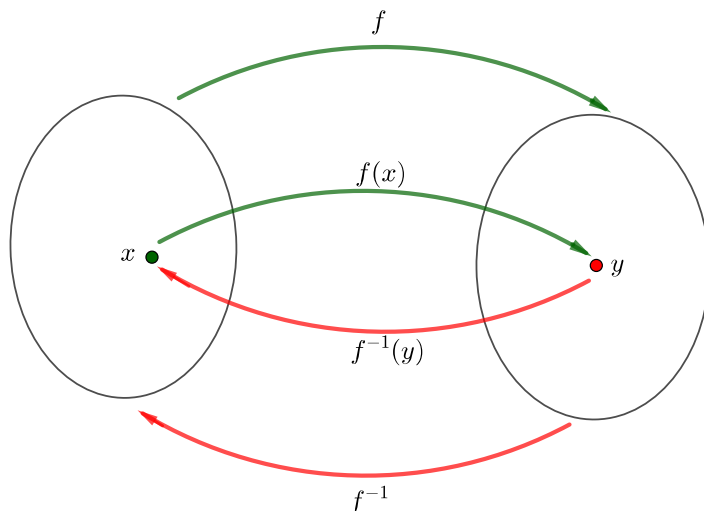


Hình 1.1.2: Biểu đồ minh họa ánh xạ, đơn ánh, toàn ánh, song ánh.

Giả sử  $f : X \rightarrow Y$  là một song ánh thì với bất kỳ  $y \in Y$  tồn tại duy nhất một phần tử  $x \in X$  sao cho  $f(x) = y$ . Khi đó ánh xạ  $f^{-1} : Y \rightarrow X$  xác định bởi  $f^{-1}(y) = x \iff y = f(x)$  gọi là **ánh xạ ngược** của  $f$ .

## 1.1.2 Vài quy tắc suy luận toán học

Toán học dựa trên một số nhỏ khái niệm và tiên đề được thừa nhận rồi suy diễn ra những điều khác theo một số nhỏ các quy tắc. Điều này khiến cho các lý luận và kết quả trong toán học có tính chặt chẽ và chính xác cao hơn so với trong một số lĩnh vực hoạt động khác của con người.



Hình 1.1.3: Biểu đồ minh họa ánh xạ ngược.

## Nguyên lí bài trung

Một mệnh đề toán học chỉ có một trong hai giá trị đúng hoặc sai. Vì thế toán học không chấp nhận mâu thuẫn (vừa  $A$  vừa không  $A$ ). Một mệnh đề dẫn tới một mâu thuẫn thì mệnh đề đó là sai.

## Phủ định sự tồn tại

Với hai mệnh đề  $A$  và  $B$  ta tạo thành mệnh đề mới  $A \vee B$ , được đọc là “ $A$  hay  $B$ ”, với hàm nghĩa rằng có ít nhất một trong hai điều  $A$  hay  $B$  xảy ra. Phủ định của  $A \vee B$  là  $\overline{A \vee B}$ , được đọc là “không  $A$  và không  $B$ ”, với hàm nghĩa rằng không có điều nào trong  $A$  và  $B$  xảy ra cả.

Giả sử mỗi phần tử  $x$  thuộc tập  $D$  được liên kết với một mệnh đề  $T(x)$ . Ta lập một dạng mệnh đề mới  $\exists \in D, T(x)$ , được đọc là “có ít nhất một phần tử  $x$  thuộc  $D$  mang tính chất  $T(x)$ ”. Phủ định của  $\exists \in D, T(x)$  là  $\forall x \in D, \overline{T(x)}$ , với hàm nghĩa rằng tất cả phần tử  $x$  thuộc  $D$  đều không có tính chất  $T(x)$ .

Có thể nhớ ngắn gọn quy tắc: **phủ định của tồn tại là với mọi**.

## Phủ định sự tổng quát

Với hai mệnh đề  $A$  và  $B$  ta tạo thành mệnh đề mới  $A \wedge B$  được đọc là “ $A$  và  $B$ ” với hàm nghĩa rằng cả hai điều  $A$  và  $B$  cùng xảy ra. Phủ định của  $A \wedge B$  là  $\overline{A \wedge B}$ , được đọc là “không  $A$  hay không  $B$ ”, với hàm nghĩa rằng ít nhất một hai điều  $A$  hay  $B$  sẽ không xảy ra.

Giả sử mỗi phần tử  $x$  thuộc tập  $D$  được liên kết với một mệnh đề  $T(x)$ . Ta lập một dạng mệnh đề mới  $\forall \in D, T(x)$ , được đọc là “tất cả phần tử  $x$  thuộc  $D$  đều mang tính chất  $T(x)$ ”. Phủ định của  $\forall \in D, T(x)$  là  $\exists x \in D, \overline{T(x)}$ , với hàm nghĩa rằng có ít nhất một phần tử  $x$  thuộc  $D$  không có tính chất  $T(x)$ .

Có thể nhớ ngắn gọn quy tắc: **phủ định của với mọi là tồn tại**.



## Phủ định dạng nhân quả

Với hai mệnh đề  $A$  và  $B$  ta tạo mệnh đề mới  $A \Rightarrow B$  được đọc là “ $A$  dẫn tới  $B$ ”, hay “ $A$  suy ra  $B$ ”, với hàm nghĩa là hề có  $A$  thì phải có  $B$ . Phủ định của  $A \Rightarrow B$  là  $A \wedge \overline{B}$ , với hàm nghĩa là có  $A$  mà vẫn không có  $B$ .

## Phép phản chứng

Lưu ý rằng mệnh đề  $A \Rightarrow B$  không cùng tính đúng sai so với mệnh đề đảo của nó, tức là dạng  $B \Rightarrow A$ .

Mệnh đề  $A \Rightarrow B$  có cùng nghĩa với **mệnh đề phản đảo** của nó, tức là dạng  $\overline{B} \Rightarrow \overline{A}$  (nếu không có  $B$  thì cũng không có  $A$ ).

Khi người ta cho giả thiết  $A$  và yêu cầu chứng minh điều  $B$ , ta có thể đi chứng minh điều tương đương là mệnh đề phản đảo, rằng phủ định của  $B$  sẽ dẫn tới phủ định của  $A$ . Việc này thường được tiến hành như sau. Ta có thể giả sử phản chứng rằng không có điều  $B$  (giả sử  $\overline{B}$ ) rồi suy luận dẫn đến không có điều  $A$  (tức là  $\overline{A}$ ) vì nếu có  $A$  sẽ tạo ra mâu thuẫn, trái với giả thiết. Vậy kết luận phải có điều  $B$ . Phép suy luận như trên được gọi là **phép phản chứng**.

## Phép quy nạp toán học

Trải qua quá trình thay đổi theo thời gian con người dần dần hình thành những khái niệm số lượng để miêu tả thế giới. Tập hợp các số tự nhiên

$$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, 4, \dots\}$$

được hình thành trong quá trình đó là cơ sở của phép đếm trong đời sống.

Từ các tiên đề Peano về số tự nhiên được đưa ra vào cuối thế kỉ 19 ta có phép chứng minh quy nạp, là cách chính xác trong toán học để tổng quát hóa từ những trường hợp đơn lẻ.

**Mệnh đề 1.1.6.** *Giả sử  $n_0$  là số tự nhiên nào đó và với mỗi số tự nhiên  $n \geq n_0$  thì  $T(n)$  là một mệnh đề với giá trị phụ thuộc giá trị của  $n$ . Nếu*

(a)  $T(n_0)$  là đúng,

(b) với mọi số tự nhiên  $k \geq n_0$ , nếu  $T(k)$  là đúng thì  $T(k+1)$  là đúng,

thì  $T(n)$  là đúng với mọi số tự nhiên  $n \geq n_0$ .

### 1.1.3 Tập hợp các số thực

Dần dần do nhu cầu của cuộc sống tập hợp các số tự nhiên được mở rộng thành tập hợp  $\mathbb{Z}$  các số nguyên bao gồm các số đếm (gọi là số nguyên dương) và các số đối của số đếm (gọi là số nguyên âm) cùng với số không 0:

$$\mathbb{Z} = \{\dots - 4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, \dots\}.$$

Người ta cũng thường gặp các phân số, là các cặp có thứ tự hai số nguyên, thường được viết dưới dạng  $\frac{m}{n}$ . Chúng được gọi là các số hữu tỉ (nghĩa là có tỉ số). Tập hợp các số hữu tỉ được miêu tả là

$$\mathbb{Q} = \left\{x \mid x = \frac{m}{n}; m \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}\right\}.$$

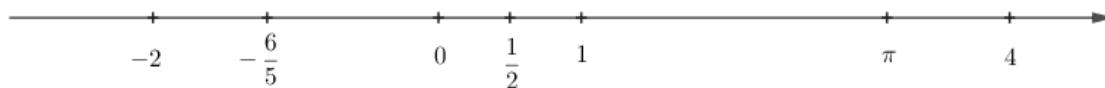
Có một tương ứng mỗi số hữu tỉ với một dãy các số tự nhiên từ 0 tới 10, được gọi là biểu diễn của số này theo hệ cơ số 10, còn được gọi là dạng thập phân. Theo cách này có những số hữu tỉ có dạng thập phân hữu hạn như  $\frac{7}{20} = 0,35$  hoặc có dạng thập phân vô hạn tuần hoàn như  $\frac{3}{7} = 0,428571428571428571428571 \dots = 0,(428571)$ .<sup>1</sup> Ở đây ta hiểu một tập là **hữu hạn** nếu nó có tương ứng song ánh với một tập hợp các số nguyên dương từ 1 tới một số nguyên dương nào đó. Ngược lại thì ta nói tập là **vô hạn**.

Người ta coi một dãy thập phân vô hạn không tuần hoàn là một số vô tỉ (nghĩa là không có tỉ số). Chẳng hạn như từ định lý Pythagore hơn 2500 năm trước người ta nhận ra chiều dài của cạnh huyền của một hình tam giác vuông có cạnh góc vuông có chiều dài 1 phải có bình phương bằng 2, không thể là một số hữu tỉ, mà là một số vô tỉ.

Hội của tập hợp các số hữu tỉ và tập hợp số các vô tỉ được gọi là tập hợp các số thực  $\mathbb{R}$ .

Các tập hợp trên có mối quan hệ  $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$ .

Người ta thường biểu diễn trực quan tập các số thực bằng hình vẽ một đường thẳng được định hướng trên mặt phẳng, được gọi là trục số thực, trên đó mỗi điểm đại diện cho một số thực.



Hình 1.1.4: Trục số thực.

Như đã nói ở đầu chương, chúng ta không đi sâu hơn nữa về các khái niệm về số thực mà chỉ thừa nhận rằng tập hợp các số thực có những tính chất thường dùng, bao gồm các phép toán như phép cộng và phép trừ, phép nhân và phép chia, các tính chất của chúng như tính kết hợp, có số đối, có số nghịch đảo, tính phân phối giữa phép cộng và phép nhân, ...

Tập hợp số thực có một thứ tự tương thích với thứ tự trên các số tự nhiên mà ta quen dùng.

Cho tập  $A \subset \mathbb{R}$ .

- Ta nói tập  $A$  là **bị chặn trên** nếu có một số thực  $\alpha$  lớn hơn hay bằng mọi số thực thuộc tập  $A$ , và số  $\alpha$  được gọi là một **chặn trên** của tập  $A$ .
- Tập  $A$  là **bị chặn dưới** nếu có một số  $\beta$  nhỏ hơn hay bằng mọi số thuộc tập  $A$ , và số  $\beta$  được gọi là một **chặn dưới** của  $A$ .
- Một tập được gọi là **bị chặn** hay **giới nội** nếu vừa bị chặn trên vừa bị chặn dưới.
- Nếu có phần tử  $\alpha \in A$  sao cho  $\alpha$  lớn hơn hay bằng mọi phần tử thuộc tập  $A$ , thì  $\alpha$  được gọi là **phần tử lớn nhất** của tập  $A$ , được kí hiệu là  $\max A$ .
- Nếu có phần tử  $\beta \in A$  sao cho  $\beta$  nhỏ hơn hay bằng mọi phần tử thuộc tập  $A$ , thì  $\beta$  được gọi là **phần tử nhỏ nhất** của tập  $A$ , được kí hiệu là  $\min A$ .

Một tính chất quan trọng của tập hợp số thực là tính đầy đủ. Tính chất này là cốt yếu trong nhiều kết quả của môn Vi tích phân. Một dạng của tính đầy đủ của tập hợp các số thực là tính chất sau, còn được gọi là tính liên tục, hay tính chặn trên nhỏ nhất:

<sup>1</sup>Trong tài liệu này ta dùng quy tắc kí hiệu số thập phân của Việt Nam, giống như ở nhiều nước khác như Pháp, Nga, ở đó phần nguyên và phần thập phân được tách biệt bởi dấu phẩy “,”. Một số nước như Anh, Mỹ thay vào đó dùng dấu chấm “.”. Do sự phổ biến của máy tính và phần mềm từ Mỹ mà dấu chấm đang được dùng nhiều hơn, đặc biệt là khi dùng máy tính, người đọc cần chú ý tới ngữ cảnh để khỏi bị nhầm lẫn.

**Mệnh đề 1.1.7 (Tính đầy đủ).** Mọi tập con khác rỗng của  $\mathbb{R}$ , nếu bị chặn trên thì sẽ có chặn trên nhỏ nhất, nếu bị chặn dưới sẽ có chặn dưới lớn nhất.

Chặn trên nhỏ nhất của tập  $A$  còn được gọi là **biên trên** hay cận trên của  $A$  thường được ký hiệu là  $\sup A$ , chặn dưới lớn nhất của  $A$  còn được gọi là **biên dưới** hay cận dưới thường được ký hiệu là  $\inf A$ .

Một hệ quả của tính đầy đủ là việc giữa hai số thực khác nhau bất kì luôn có ít nhất một số hữu tỉ.

Ngày nay tập hợp các số thực là công cụ cơ bản cho các miêu tả số lượng. Tập hợp các số thực thường được dùng để mô hình hóa thời gian và các không gian liên tục.

Môn học này chúng ta chọn dừng lại không đi vào chi tiết hơn nữa những chỗ nào cần trực tiếp sử dụng tính đầy đủ của tập hợp các số thực. Người đọc muốn tìm hiểu thêm có thể tham khảo những tài liệu như [Duc06], [Lan97].

## 1.1.4 Dãy số thực

Một dãy số là một họ các số thực được đánh chỉ số bằng tập hợp các số tự nhiên, hoặc bằng một tập con các số tự nhiên kể từ một số nào đó trở đi. Một cách đơn giản có thể hình dung một dãy số là một họ các số thực  $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n, \dots$ . Chính xác hơn, một dãy số thực là một tương ứng mỗi số tự nhiên với một số thực, tức là một ánh xạ từ tập hợp các số tự nhiên, hoặc tập hợp các số tự nhiên kể từ một số nào đó trở đi, vào tập hợp các số thực.

**Định nghĩa 1.1.8.** Một **dãy số** là một ánh xạ  $f$  từ tập  $\{n \in \mathbb{N} \mid n \geq n_0\}$  với một  $n_0 \in \mathbb{N}$  vào tập  $\mathbb{R}$ .

Nếu ta ký hiệu các giá trị  $f(n)$  bởi  $a_n = f(n)$ , thì dãy số này được ký hiệu bởi  $(a_n)_{n \geq n_0}$ , hoặc  $\{a_n\}_{n \geq n_0}$ , hoặc ngắn gọn là  $(a_n)$  hoặc  $\{a_n\}$  nếu không sợ nhầm lẫn.

Tập hợp  $\{n \in \mathbb{N} \text{ và } n \geq n_0\}$  được gọi là **tập giá trị** của dãy  $(a_n)_{n \geq n_0}$ .

Một dãy số được gọi là **bị chặn trên**; hoặc **bị chặn dưới**; hoặc **bị chặn** (hay **giới nội**), nếu tập giá trị của nó có các tính chất tương ứng.

Như vậy dãy số  $(a_n)_{n \geq n_0}$  bị chặn khi và chỉ khi có số dương  $M$  sao cho  $\forall n \geq n_0, |a_n| \leq M$ .

**Ví dụ 1.1.9.** Công thức  $a_n = \frac{1}{n-3}$ ,  $n \geq 4$ , xác định một dãy số  $(a_n)_{n \geq 4}$ , và là dãy bị chặn vì  $|a_n| \leq 1$ ,  $\forall n \geq 4$ .

Dãy số  $(a_n)_{n \in \mathbb{Z}^+}$  định bởi  $a_n = (-1)^n$  có miền giá trị là  $\{-1; 1\}$ , và là dãy bị chặn vì  $|a_n| \leq 1$ ,  $\forall n$ .

Dãy số  $(u_n)$  được gọi là **dãy tăng** nếu  $\forall n, u_n \leq u_{n+1}$ , được gọi là **dãy giảm** nếu  $\forall n, u_n \geq u_{n+1}$ . Dãy tăng và dãy giảm được gọi chung là **dãy đơn điệu**.

## Giới hạn của dãy

Giáo trình này giả sử người học đã học chương trình toán học phổ thông của Việt Nam, nên đã gặp các khái niệm về giới hạn của dãy. Ở mục này chúng ta thảo luận lại một cách ngắn gọn khái niệm này vì ngoài giá trị riêng nó còn giúp người học tiếp cận dễ dàng hơn với khái niệm giới hạn của hàm số ở Chương 2. Một số thảo luận sâu hơn về dãy sẽ có ở Chương 6.

Ta muốn thấy một dãy số thay đổi như thế nào. Trong một số trường hợp, giá trị của dãy có “khuyênh hướng gần bằng” một số cố định khi chỉ số  $n$  tăng.

**Ví dụ 1.1.10.** Dãy số  $(a_n)$  định bởi  $\forall n \in \mathbb{Z}^+, a_n = \frac{1}{n}$ , có các giá trị xấp xỉ gần bằng 0 khi  $n$  càng lớn.

Ngược lại, các giá trị trong dãy có thể “không gần bằng” một số nhất định nào khi chỉ số  $n$  tăng dần.

**Ví dụ 1.1.11.** Xét dãy  $(a_n)$  định bởi  $a_n = (-1)^n$ . Khi  $n$  càng lớn, giá trị của dãy khi thì bằng  $-1$ , khi thì bằng  $1$ .

Trong nhiều trường hợp ta có thể hiểu đơn giản rằng giới hạn của dãy  $(a_n)$  là số thực  $L$  nếu như khi chỉ số  $n$  lớn hơn thì số hạng  $a_n$  gần số  $L$  hơn. Tuy nhiên điều này không đủ tổng quát, như ví dụ sau chỉ ra.

**Ví dụ 1.1.12.** Xét dãy số  $(a_n)_{n \geq 1}$  định bởi

$$a_n = \begin{cases} \frac{1}{n+2}, & n \text{ chẵn,} \\ \frac{1}{n}, & n \text{ lẻ.} \end{cases}$$

Ta thấy  $a_n$  có khuynh hướng gần tới 0, tuy nhiên quá trình này không diễn ra một cách đơn điệu, chẳng hạn  $a_3 = \frac{1}{3}$ ,  $a_4 = \frac{1}{6}$ ,  $a_5 = \frac{1}{5}$ , ...

Khái niệm giới hạn tổng quát là như sau: Giới hạn của dãy  $(a_n)$  là số thực  $L$  nếu như ta có thể chắc chắn sai khác giữa số hạng  $a_n$  và số  $L$  không vượt quá một số cho trước bất kì miễn là ta đảm bảo chỉ số  $n$  đủ lớn. Nói hơi khác đi,  $a_n$  tiến về  $L$  nếu  $a_n$  gần  $L$  tùy ý miễn  $n$  đủ lớn.

**Định nghĩa 1.1.13.** Một dãy số  $(a_n)$  được gọi là **hội tụ** (hay **tiến về**) một số thực  $L$  khi độ lớn sai số  $|a_n - L|$  nhỏ một cách tùy ý, miễn là giá trị  $n$  đủ lớn. Dưới dạng kí hiệu:

$$\forall \varepsilon > 0, \exists p \in \mathbb{N}, \forall n \geq p, |a_n - L| < \varepsilon. \quad (1.1.1)$$

Khi đó ta viết là  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = L$ , hoặc vắn tắt là  $\lim a_n = L$  nếu không có nhầm lẫn, hoặc  $a_n \rightarrow L$  khi  $n \rightarrow \infty$ . Số  $L$  được gọi là **giới hạn** của dãy  $(a_n)$ .

Nếu không tồn tại số thực  $L$  nào thỏa 1.1.1 thì ta nói dãy  $(a_n)$  là **phân kỳ**.

**Ví dụ 1.1.14.** Tìm  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n}$ .

Ta có thể dự đoán kết quả là 0. Thực vậy, cho  $\varepsilon > 0$  bất kì, ta có

$$\left| \frac{1}{n} \right| < \varepsilon \iff n > \frac{1}{\varepsilon}.$$

Như vậy chỉ cần lấy số  $p$  trong định nghĩa lớn hơn  $\frac{1}{\varepsilon}$ , chẳng hạn  $p = \lfloor \frac{1}{\varepsilon} \rfloor + 1$ . Vậy

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0.$$

**Ví dụ 1.1.15.** Xét dãy số  $(a_n)$  định bởi  $a_n = \frac{n}{n+1}$ . Theo Định nghĩa 1.1.13, ta chứng minh  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 1$  như sau: độ lớn sai số giữa  $a_n$  và 1 là

$$|a_n - 1| = \left| \frac{n}{n+1} - 1 \right| = \frac{1}{n+1}.$$

Với số  $\varepsilon > 0$  tùy ý, ta có thể làm sai số  $|a_n - 1|$  bé hơn  $\varepsilon$ , miễn là lấy  $n$  sao cho  $n+1 > \frac{1}{\varepsilon}$  hay  $n \geq \frac{1}{\varepsilon}$ . Trong hình thức của (1.1.1), ta có thể chọn  $p$  là một số tự nhiên cố định và lớn hơn  $\frac{1}{\varepsilon}$ .

Trong khái niệm phân kỳ, ta có sự phân kỳ đặc biệt sau đây

**Định nghĩa 1.1.16.** Dãy số  $(a_n)$  được gọi là **phân kỳ ra dương vô cực**, hay tiến về dương vô cực, nếu giá trị  $a_n$  có thể lớn một cách tùy ý, miễn là  $n$  đủ lớn. Hình thức kí hiệu là

$$\forall M \in \mathbb{R}, \exists p \in \mathbb{N}, \forall n \geq p, a_n > M. \quad (1.1.2)$$

Khi đó ta viết  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \infty$ , hoặc  $a_n \rightarrow \infty$  khi  $n \rightarrow \infty$ , và nói là “giới hạn của  $a_n$  khi  $n$  tiến ra vô cùng là vô cùng”.

Dãy số  $(a_n)$  được gọi là **phân kỳ ra âm vô cực**, hay tiến về âm vô cực, nếu giá trị  $a_n$  có thể nhỏ hơn bất cứ số nào, miễn là  $n$  đủ lớn:

$$\forall M \in \mathbb{R}, \exists p \in \mathbb{N}, \forall n \geq p, a_n < M. \quad (1.1.3)$$

Khi đó ta viết  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = -\infty$ , hoặc  $a_n \rightarrow -\infty$  khi  $n \rightarrow \infty$ .

**Ví dụ 1.1.17.**

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n^2 = \infty.$$

Thực vậy, cho  $M \in \mathbb{R}$  bất kì, ta có

$$n^2 > M \iff n > \sqrt{M}.$$

Như vậy lấy  $p = \sqrt{M}$  trong định nghĩa ta được kết luận.

**Ghi chú 1.1.18.** Các khái niệm “vô cùng”, “vô cực”, “vô hạn”, và các kí hiệu  $\infty$  và  $-\infty$  không phải là các số thực. Chúng được dùng để miêu tả những quá trình giới hạn.

## Vài kết quả về dãy hội tụ

Từ định nghĩa sự hội tụ ta có thể thu được các tính chất căn bản trên đây:

**Định lý 1.1.19 (Sự bảo toàn phép toán qua giới hạn).** Giả sử  $(a_n)_n$  và  $(b_n)_n$  là các dãy hội tụ. Ta có:

$$(a) (a_n + b_n)_n \text{ là một dãy hội tụ và } \lim_{n \rightarrow \infty} (a_n + b_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n + \lim_{n \rightarrow \infty} b_n$$

$$(b) (a_n - b_n)_n \text{ là một dãy hội tụ và } \lim_{n \rightarrow \infty} (a_n - b_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n - \lim_{n \rightarrow \infty} b_n$$

$$(c) (a_n b_n)_n \text{ là một dãy hội tụ và } \lim_{n \rightarrow \infty} (a_n b_n) = \left( \lim_{n \rightarrow \infty} a_n \right) \left( \lim_{n \rightarrow \infty} b_n \right)$$

$$(d) \text{ Nếu } \forall n, b_n \neq 0 \text{ và } \lim_{n \rightarrow \infty} b_n \neq 0 \text{ thì } \left( \frac{a_n}{b_n} \right)_n \text{ là một dãy hội tụ và } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{\lim_{n \rightarrow \infty} a_n}{\lim_{n \rightarrow \infty} b_n}.$$

Vậy tổng, hiệu, tích, thương của các dãy hội tụ là hội tụ, và giới hạn là thu được bằng các phép toán tương ứng trên các giới hạn.

*Chứng minh.* Đặt  $a = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n$  và  $b = \lim_{n \rightarrow \infty} b_n$ .

(a) Mặc dù chứng minh chính xác có hơi phức tạp hơn, nhưng chúng ta có thể thấy  $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n + b_n) = a + b$  rõ ràng từ tính chất

$$|(a_n + b_n) - (a + b)| \leq |a_n - a| + |b_n - b|.$$

Chính xác hơn như sau. Cho  $\epsilon > 0$  ta có số  $N_1$  sao cho khi  $n \geq N_1$  thì  $|a_n - a| < \epsilon/2$ , và có số  $N_2$  sao cho khi  $n \geq N_2$  thì  $|b_n - b| < \epsilon/2$ . Vậy có số  $N = \max\{N_1, N_2\}$  sao cho khi  $n \geq N$  thì

$$|(a_n + b_n) - (a + b)| \leq |a_n - a| + |b_n - b| < \epsilon/2 + \epsilon/2 = \epsilon.$$

Theo định nghĩa thì điều này thể hiện rằng  $a_n + b_n$  hội tụ về  $a + b$ .

(b) Tương tự, tính chất này đến từ tính chất của các số thực:

$$|(a_n - b_n) - (a - b)| \leq |a_n - a| + |b_n - b|.$$

(c) Tính chất này đến từ tính chất của các số thực:

$$|a_n b_n - ab| = |(a_n - a)b_n + a(b_n - b)| \leq |a_n - a| |b_n| + |a| |b_n - b|.$$

Cụ thể hơn, cho  $\epsilon_1 > 0$ , có số nguyên  $N$  sao cho khi  $n \geq N$  thì  $|a_n - a| < \epsilon_1$  và  $|b_n - b| < \epsilon_1$ . Khi đó

$$\begin{aligned} |a_n b_n - ab| &= |(a_n - a)b_n + a(b_n - b)| \leq |a_n - a| |b_n| + |a| |b_n - b| \\ &\leq |a_n - a| (|b_n - b| + |b|) + |a| |b_n - b| \\ &< \epsilon_1(\epsilon_1 + |b|) + |a| \epsilon_1 = \epsilon_1(\epsilon_1 + |a| + |b|). \end{aligned}$$

Bây giờ, cho trước  $\epsilon > 0$ , ta có thể chọn  $\epsilon_1 > 0$  sao cho  $\epsilon_1(\epsilon_1 + |a| + |b|) < \epsilon$ , chẳng hạn chọn  $\epsilon_1 < 1$  và  $\epsilon_1 < \epsilon/(1 + |a| + |b|)$ , thì  $|a_n b_n - ab| < \epsilon$ .

Các bước trung gian như trên về sau khi đã thông thạo hơn ta có thể bỏ qua không trình bày nữa.

(d) Do câu (c) ta chỉ cần tìm giới hạn của  $\frac{1}{b_n}$ . Ta có

$$\left| \frac{1}{b_n} - \frac{1}{b} \right| = \left| \frac{b_n - b}{b_n b} \right|.$$

Ta dùng bất đẳng thức tam giác (Bài tập 1.1.13)  $|b_n| \geq ||b_n - b| - |b||$ . Cho  $\epsilon_1 > 0$ , với  $n$  đủ lớn ta có  $|b_n - b| < \epsilon_1$ , do đó

$$\left| \frac{1}{b_n} - \frac{1}{b} \right| = \frac{|b_n - b|}{|b_n||b|} \leq \frac{\epsilon_1}{|b||b| - \epsilon_1}.$$

Cho trước  $\epsilon > 0$ , chọn  $\epsilon_1 > 0$  sao cho  $\epsilon_1 < |b|/2$  và  $\epsilon_1 < \epsilon b^2/2$  thì

$$\frac{\epsilon_1}{|b||b| - \epsilon_1} < \frac{\epsilon_1}{|b| \frac{|b|}{2}} < \epsilon.$$

Ta được điều cần chứng minh. □

**Định lý 1.1.20 (Sự bảo toàn thứ tự qua giới hạn).** Nếu có  $n_0 \in \mathbb{N}$  sao cho  $\forall n \geq n_0, a_n \leq b_n$ , thì  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n \leq \lim_{n \rightarrow \infty} b_n$ .

*Chứng minh.* Giả sử  $a > b$ . Đặt  $\epsilon = \frac{a-b}{2} > 0$ . Vì  $a_n$  hội tụ về  $a$  nên với  $n$  đủ lớn thì phải có  $-\epsilon < a_n - a$ , tức là  $a_n > a - \epsilon = \frac{a+b}{2}$ . Vì  $b_n$  hội tụ về  $b$  nên với  $n$  đủ lớn thì phải có  $b_n - b < \epsilon$ , tức là  $b_n < b + \epsilon = \frac{a+b}{2}$ . Điều này mâu thuẫn với giả thiết  $a_n \leq b_n$ . Vậy  $a \leq b$ . □

Ta lập tức thu được một hệ quả thường dùng:

**Định lý 1.1.21 (Định lý kẹp).** Nếu có  $n_0 \in \mathbb{N}$  sao cho  $\forall n \geq n_0, a_n \leq b_n \leq c_n$ , và  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} c_n = L$ , thì  $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = L$ .

**Ví dụ 1.1.22.** Tìm  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^2+1}$ .

Ta có đánh giá

$$0 < \frac{1}{n^2+1} < \frac{1}{n^2},$$

với

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \cdot \frac{1}{n} = \left( \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \right) \cdot \left( \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \right) = 0 \cdot 0 = 0.$$

Vậy theo định lý kẹp thì

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^2+1} = 0.$$

## Bài tập

**1.1.1.** Cho  $A, B, C$  là ba tập hợp thỏa  $A \subset B$  và  $B \subset C$ . Chứng tỏ  $A \subset C$ .

**1.1.2.** Viết mệnh đề sau ở dạng kí hiệu và tìm mệnh đề phủ định của nó: Có một số thực dương  $M$  sao cho với mọi phần tử  $x$  của tập  $A$  thì  $x \leq M$ .

**1.1.3.** Khi nào thì một ánh xạ không là đơn ánh? không là toàn ánh? không là song ánh?

**1.1.4.** Một hàm  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  là tăng nếu với hai số thực  $x, y$  bất kì thì  $x \leq y$  dẫn tới  $f(x) \leq f(y)$ . Hàm như thế nào thì không tăng?

**1.1.5.** Cho  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = x^3$ . Hàm này có phải là một song ánh hay không?

**1.1.6.** Hãy kiểm tra tính đúng đắn của các công thức:

(a)  $1 + 2 + 3 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$ ,  $n \in \mathbb{Z}^+$ .

(b)  $1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$ ,  $n \in \mathbb{Z}^+$ .

(c)  $1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + n^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$ ,  $n \in \mathbb{Z}^+$ .

**1.1.7.** (a) Cho số tự nhiên  $m$ . Chứng minh rằng nếu  $m^2$  chẵn thì  $m$  cũng là số chẵn.

(b) Chứng minh rằng nếu một số chính phương (số là bình phương của một số nguyên) là chẵn thì số chính phương đó chia hết cho 4.

**1.1.8.** Chứng minh rằng không tồn tại phân số dạng  $\frac{m}{n}$ , với  $m$  và  $n$  là số tự nhiên ( $n \neq 0$ ), thỏa  $\left(\frac{m}{n}\right)^2 = 2$ . Như vậy không có số hữu tỉ  $x$  nào sao cho  $x^2 = 2$ .

**1.1.9.** Cho  $\alpha > -1$  và  $n$  là số tự nhiên tùy ý lớn hơn 1. Dùng phép qui nạp, hãy chứng minh bất đẳng thức Bernoulli:  $(1 + \alpha)^n > 1 + n\alpha$ .

**1.1.10.** Cho số thực  $c \neq 1$  và số nguyên dương  $n$ . Hãy kiểm công thức:

$$1 + c + c^2 + c^3 + \dots + c^n = \frac{1 - c^{n+1}}{1 - c}.$$

**1.1.11 (Nhị thức Newton).** Cho hai số thực  $a, b$  và số nguyên dương  $n$ . Hãy kiểm công thức:

$$(a + b)^n = \sum_{i=0}^n C_n^i a^i b^{n-i},$$

với  $C_n^i = \frac{n!}{i!(n-i)!}$ .

**1.1.12.** Chứng tỏ hai mệnh đề sau là tương đương: mệnh đề 1 là “ $\forall \varepsilon > 0, a < \varepsilon$ ”, mệnh đề 2 là “ $\forall \varepsilon > 0, a \leq \frac{\varepsilon}{2}$ ”.

**1.1.13.** Chứng minh các bất đẳng thức sau đây (bất đẳng thức tam giác)

(a)  $|x + y| \leq |x| + |y|$                       (b)  $|x| - |y| \leq |x - y|$                       (c)  $||x| - |y|| \leq |x - y|$ .

**1.1.14.** Tìm giới hạn:

(a)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n-1}{3n+2}$

(d)  $\lim_{n \rightarrow \infty} 3n^2 - 2n - 1$

(b)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{-2n+1}{3n^2+2n-4}$

(e)  $\lim_{n \rightarrow \infty} -5n^2 + 2n + 3$

(c)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3n^2-2n+1}{5n-3}$

(f)  $\lim_{n \rightarrow \infty} -n^3 + 4n^2 + 1$

(g)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n!}$

**1.1.15.** Chứng tỏ giới hạn của một dãy nếu có là duy nhất. Nói cách khác, một dãy số không thể hội tụ về hai giới hạn khác nhau.

## 1.2 Hàm số

Các ánh xạ từ một tập con của tập hợp các số thực vào tập hợp các số thực thường được gọi là các *hàm số*, hay đầy đủ hơn là hàm số thực với biến số thực.

### 1.2.1 Hàm số sơ cấp

#### Hàm lượng giác

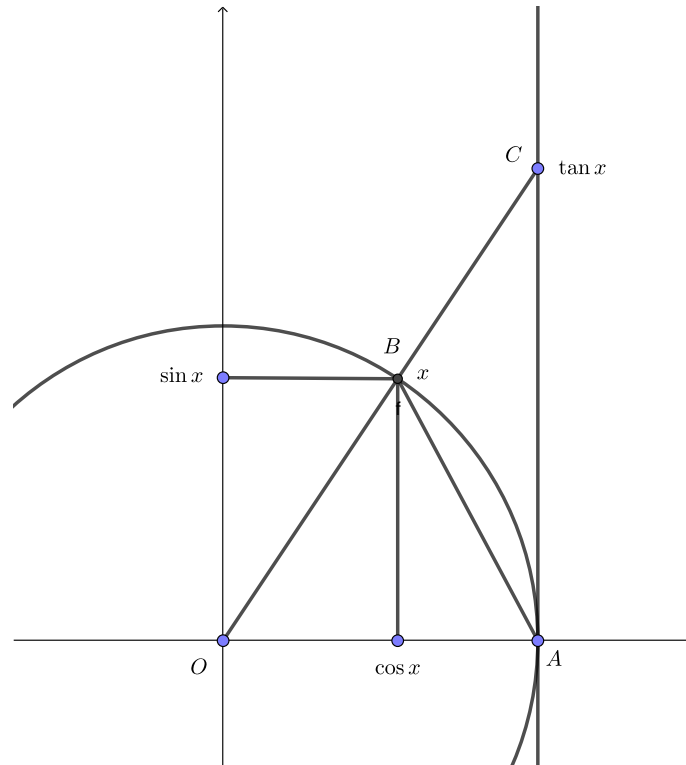
Người đọc đã học môn Lượng giác trong chương trình trung học. Tài liệu này giả sử các tính chất của các hàm lượng giác đã quen thuộc với người đọc.

Môn Lượng giác (nghĩa đen: đo góc) ra đời sau môn hình học Euclid vài trăm năm, nhưng trước môn Vi tích phân hàng trăm năm. Môn Vi tích phân như chúng ta trình bày ở đây dựa trên hệ thống suy diễn từ tập hợp các số thực, chỉ mới được phát triển từ thế kỉ 19. Vì vậy chúng ta không ngạc nhiên khi một số kết quả trong Lượng giác hay Hình học mà ta đã biết ở trung học (mà ta đã học theo cách chúng được phát triển trong lịch sử) là chưa tương thích, tức là chưa nằm trong cùng hệ suy diễn, với môn Vi tích phân. Chẳng hạn khái niệm “góc” giữa hai “đường thẳng” mà ta dùng trong hình học và lượng giác chưa được định nghĩa từ tập hợp số thực. Về sau người ta có thể đưa hàm lượng giác vào khuôn khổ của vi tích phân, chẳng hạn bằng cách dùng tích phân, hoặc dùng chuỗi, tuy nhiên việc này khá phức tạp, chưa thích hợp cho phần mở đầu môn học này. Người đọc quan tâm về sau có thể tham khảo những tài liệu như [Apo67], [Spi94], [Rud76].

Môn Vi tích phân quan tâm các hàm lượng giác chủ yếu để sử dụng các tính chất đặc biệt của chúng. Dưới đây ta tóm tắt một số tính chất của hàm lượng giác mà ta thừa nhận và thường dùng.

- $\sin$  và  $\cos$  là hàm số xác định trên  $\mathbb{R}$ , có giá trị trên  $[-1, 1]$ .
- $\sin$  và  $\cos$  là hàm tuần hoàn có chu kì là  $2\pi$ . (Số thực  $\pi$  đã quen thuộc, nhưng trong giáo trình này ta chưa đưa ra định nghĩa cho nó.)
- $\cos(0) = 1$ ,  $\cos(\frac{\pi}{2}) = 0$   $\sin(\frac{\pi}{2}) = 1$ .
- $\cos(x - y) = \cos(x)\cos(y) + \sin(x)\sin(y)$ .
- $\cos^2(x) + \sin^2(x) = 1$ .
- Với  $x \in (0, \frac{\pi}{2})$  thì  $\cos$  là hàm giảm,  $\sin$  là hàm tăng.
- $\tan = \frac{\sin}{\cos}$ ,  $\cot = \frac{1}{\tan}$ .
- Với  $x \in (0, \frac{\pi}{2})$  thì  $\sin x < x < \tan x$ .





Hình 1.2.1: Minh họa hình học của tính chất  $\sin x < x < \tan x$  với  $x \in (0, \frac{\pi}{2})$ . Diện tích tam giác  $OAB$  là  $\frac{1}{2} \cos x$ , nhỏ hơn diện tích góc  $OAB$  của hình tròn đơn vị là  $\frac{1}{2}x$ , nhỏ hơn diện tích của tam giác  $OAC$  là  $\frac{1}{2} \tan x$ .

Từ các tính chất trên ta có thể suy ra nhiều tính chất khác, trong đó có sự tồn tại của các hàm lượng giác ngược.

- Trên  $[0, \pi]$  thì hàm  $\cos$  là một song ánh lên  $[-1, 1]$  và có hàm ngược là hàm  $\arccos$ .
- Trên  $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$  thì hàm  $\sin$  là một song ánh lên  $[-1, 1]$  và có hàm ngược là hàm  $\arcsin$ .
- Trên  $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$  thì hàm  $\tan$  là một song ánh lên  $\mathbb{R}$  và có hàm ngược là hàm  $\arctan$ .

## Hàm lũy thừa và hàm mũ

Với  $x$  là một số thực khác 0, nếu  $n$  là một số nguyên dương thì  $x^n$  là tích của  $n$  số  $x$ . Nếu  $n$  là một số nguyên âm thì ta định nghĩa  $x^n$  là số thực  $\frac{1}{x^{-n}}$ . Ta định nghĩa  $x^0 = 1$ .

Nếu  $x > 0$  và  $n$  là một số nguyên dương thì có duy nhất một số thực không âm  $a$  sao cho  $a^n = x$ . Có thể chứng tỏ điều này bằng cách dùng tính đầy đủ của tập hợp số thực. Số  $a$  được gọi là căn bậc  $n$  của  $x$ , kí hiệu là  $\sqrt[n]{x}$  hay  $x^{\frac{1}{n}}$ .

Nếu  $x > 0$  và  $m \in \mathbb{Z}$  và  $n \in \mathbb{Z}^+$  thì  $x^{\frac{m}{n}}$  được định nghĩa là  $\sqrt[n]{x^m}$ .

Như vậy khi  $x > 0$  và  $r \in \mathbb{Q}$  thì  $x^r$  đã được định nghĩa. Khi  $r \in \mathbb{R}$  thì định nghĩa cần thông qua quá trình giới hạn, từ việc xấp xỉ số thực bởi số hữu tỉ. Cũng như đối với hàm lượng giác, chi tiết của việc xây dựng phức tạp hơn mức độ của môn học này. Chúng ta chấp nhận là hàm lũy thừa và hàm mũ có thể được xây dựng thỏa mãn những tính chất như đã biết ở trung học.

**Ví dụ 1.2.1.** *Hằng số  $e$*  là một số thực thường gặp. Đó là một số vô tỉ, có giá trị gần

bằng 2,71828. <sup>2</sup> Nó có thể được định nghĩa là

$$e = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n.$$

Hàm mũ  $y = e^x$  là một hàm tăng có tập giá trị là  $(0, \infty)$ . Hàm ngược của hàm này được gọi là **hàm lô-ga-rít tự nhiên**, kí hiệu là  $\ln$ . <sup>3</sup> Vậy  $y = e^x \iff x = \ln y$ .

Cho trước hai hàm số  $f$  và  $g$  sao cho tập giá trị của  $g$  nằm trong tập xác định của  $f$ , thì **hàm hợp**  $f \circ g$  được định nghĩa bởi

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)).$$

Tổng, hiệu, tích, thương, hàm hợp của các hàm lũy thừa, hàm mũ, hàm log, hàm lượng giác, hàm lượng giác ngược được gọi là các **hàm số sơ cấp**. Trong các hàm sơ cấp cho các hàm thường gặp như hàm đa thức, hàm phân thức (thương của hai đa thức), hàm căn thức.

## 1.2.2 Đồ thị. Đường thẳng

Cho hàm số  $f : D \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ . **Đồ thị** của hàm  $f$  là tập hợp tất cả các điểm  $(x, y)$  trong mặt phẳng  $\mathbb{R}^2$  với  $x \in D$  và  $y = f(x)$ .

Một **đường thẳng** trong  $\mathbb{R}^2$  là đồ thị của một hàm số có dạng  $y = ax + b$  hoặc  $x = c$  với  $a, b, c$  là các hằng số thực. Số  $a$  được gọi là **hệ số góc** hay **độ nghiêng** hay độ dốc của đường thẳng. Chú ý là khái niệm hệ số góc không được định nghĩa cho đường thẳng đứng  $x = c$ .

Các hàm có dạng  $y = ax + b$  vì thế được gọi là các **hàm số tuyến tính**. <sup>4</sup>

Xét  $(x_0, y_0)$  và  $(x_1, y_1)$  là hai điểm bất kỳ trên đường thẳng không thẳng đứng  $l$ . Vì  $y_0 = ax_0 + b$  và  $y_1 = ax_1 + b$  nên hệ số góc của đường thẳng nối hai điểm này là

$$a = \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0}.$$

Điều này chỉ ra rằng hệ số góc của  $l$  không phụ thuộc vào việc lựa chọn hai điểm trên  $l$ .

**Ví dụ 1.2.2.** Hệ số góc của đường thẳng nối hai điểm  $(4, 6)$  và  $(0, 7)$  là  $\frac{7-6}{0-4} = -\frac{1}{4}$ .

Hai đường thẳng được gọi là **song song** nếu chúng khác nhau nhưng có cùng một hệ số góc hoặc cùng thẳng đứng.

**Ví dụ 1.2.3.** Nhiệt độ theo đơn vị Celsius  $x$  và nhiệt độ theo đơn vị Fahrenheit  $y$  có quan hệ tuyến tính với nhau, đó là  $0^\circ$  Celsius hay  $32^\circ$  Fahrenheit là nhiệt độ đông của nước và  $100^\circ$  Celsius hay  $212^\circ$  Fahrenheit là nhiệt độ sôi của nước. Để tìm phương trình biểu diễn mối liên hệ của độ Celsius và độ Fahrenheit, chúng ta tìm phương trình của đường thẳng đi qua hai điểm  $(0, 32)$  và  $(100, 212)$ . Hệ số góc của đường thẳng này là

$$m = \frac{212 - 100}{32 - 0} = \frac{9}{5}.$$

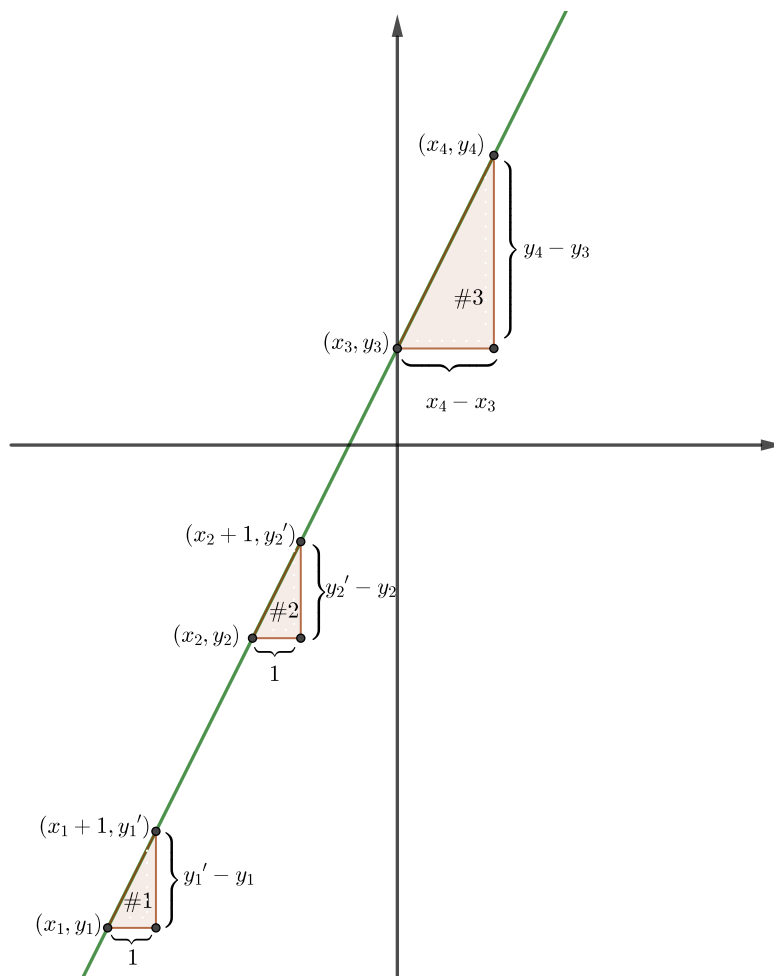
Điều này có nghĩa là khi nhiệt độ Celsius tăng  $1^\circ$  thì nhiệt độ Fahrenheit tăng  $9/5^\circ$ . Vậy

$$\frac{y - 32}{x - 0} = \frac{9}{5} \quad \text{hay} \quad y = \frac{9}{5}x + 32.$$

<sup>2</sup>Kí hiệu  $e$  có lẽ chỉ Euler (một trong những người đầu tiên sử dụng nó), hoặc exponent (mũ), và còn được gọi là hằng số Napier (tên Napier còn được viết là Néper).

<sup>3</sup>trong tiếng Anh là natural logarithm

<sup>4</sup>Thuật ngữ hàm số tuyến tính trong môn Vi tích phân hơi khác với trong môn Đại số tuyến tính. Trong Đại số tuyến tính thì chỉ có hàm  $y = ax$  mới tuyến tính.



Hình 1.2.2: Hệ số góc của đường thẳng không phụ thuộc vào cách chọn hai điểm để tính.

## Bài tập

1.2.1. Tìm công thức cho hàm số tuyến tính có đồ thị với tính chất:

- có hệ số góc là 2 và giao với trục  $Oy$  tại  $(0, 3)$
- có hệ số góc là  $-3$  và giao với trục  $Oy$  tại  $(0, 0)$
- có hệ số góc là 4 và đi qua điểm  $(1, 1)$
- có hệ số góc là  $-2$  và đi qua điểm  $(2, -2)$
- đi qua các điểm  $(2, 3)$  và  $(4, 5)$
- đi qua các điểm  $(2, -4)$  và  $(0, 3)$ .

1.2.2. Hãy viết phương trình cho các đường thẳng và vẽ đường thẳng khi biết đường thẳng này:

- có hệ số góc là  $-1$ , có giao điểm với trục  $Oy$  là  $(0, -2)$
- có hệ số góc là  $-1$ , đi qua điểm  $(-4, -4)$
- đi qua hai điểm  $(0, 8)$  và  $(8, 0)$ .

## Chương 2

# Hàm số liên tục

## 2.1 Giới hạn của hàm số

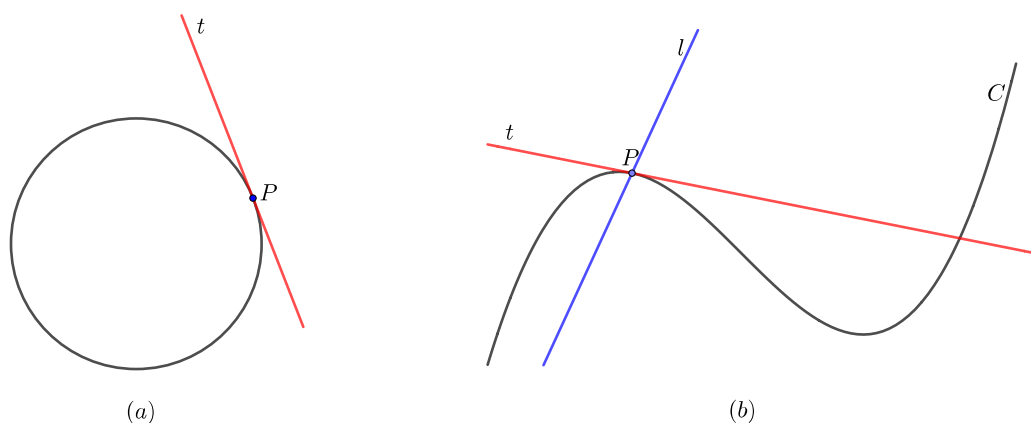
### 2.1.1 Tiếp tuyến. Vận tốc. Tỷ lệ thay đổi

Các vấn đề về hàm số, giới hạn hàm số, hàm số liên tục đã được giới thiệu trong bậc trung học phổ thông. Trong giáo trình này, chúng ta sẽ tìm hiểu các định nghĩa, định lý chính xác cho các vấn đề trên.

Trước khi đi vào định nghĩa chính xác cho giới hạn hàm số chúng ta xem xét các bài toán tiếp tuyến và bài toán vận tốc.

#### Bài toán tiếp tuyến

Đối với đường tròn thì có thể coi tiếp tuyến là đường thẳng giao với đường tròn đúng một điểm, như trong Hình 2.1.1 (a). Đối với các đường cong phức tạp hơn thì cách tiếp cận trên không phù hợp. Hình 2.1.1 (b) chỉ ra hai đường thẳng  $l$  và  $t$  qua điểm  $P$  trên đường cong  $C$ . Đường  $l$  giao với  $C$  đúng một điểm nhưng nhìn hình thì không có vẻ gì là tiếp xúc. Đường thẳng  $t$  có vẻ tiếp xúc với  $C$  nhưng cắt  $C$  tại hai điểm.



Hình 2.1.1

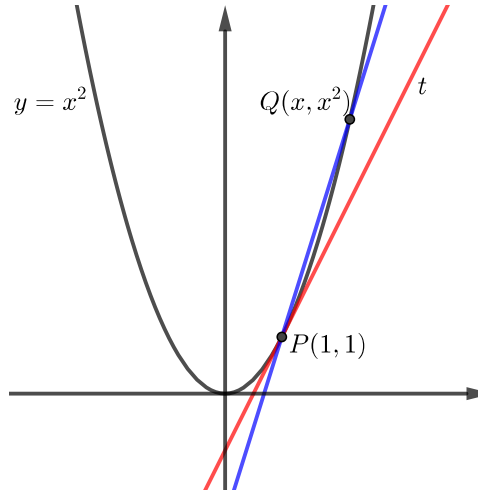
Như vậy khái niệm “tiếp tuyến” tuy quen thuộc và dễ hình dung trong một số trường hợp, lại chưa được xây dựng rõ ràng một cách tổng quát.

Dưới đây ta xét một ví dụ để tìm hiểu khái niệm này.

**Ví dụ 2.1.1.** Tìm phương trình đường tiếp tuyến cho parabol  $y = x^2$  tại điểm  $P(1, 1)$ .

Ta sẽ phải tìm hệ số góc  $m$  của đường tiếp tuyến. Ta tìm một xấp xỉ của  $m$  bằng cách chọn điểm  $Q(x, x^2)$  trên parabol gần điểm  $P$  và tính hệ số góc của đường thẳng cát tuyến  $PQ$  là

$$m_{PQ} = \frac{x^2 - 1}{x - 1}.$$



Hình 2.1.2

Từ hình vẽ ta thấy khi  $Q$  càng gần  $P$ ,  $x$  càng gần 1 thì hệ số góc càng gần 2. Ta cũng thấy điều này từ tính toán số lượng trong bảng dưới đây:

$x$	$m_{PQ}$	$x$	$m_{PQ}$
2	3	0	1
1,5	2,5	0,5	1,5
1,1	2,1	0,9	1,9
1,01	2,01	0,99	1,99
1,001	2,001	0,999	1,999

Bây giờ ta có thể đoán rằng hệ số góc của tiếp tuyến tại  $P$  là 2, là “giới hạn” của hệ số góc của đường cát tuyến  $PQ$  khi  $Q$  tiến về  $P$ .

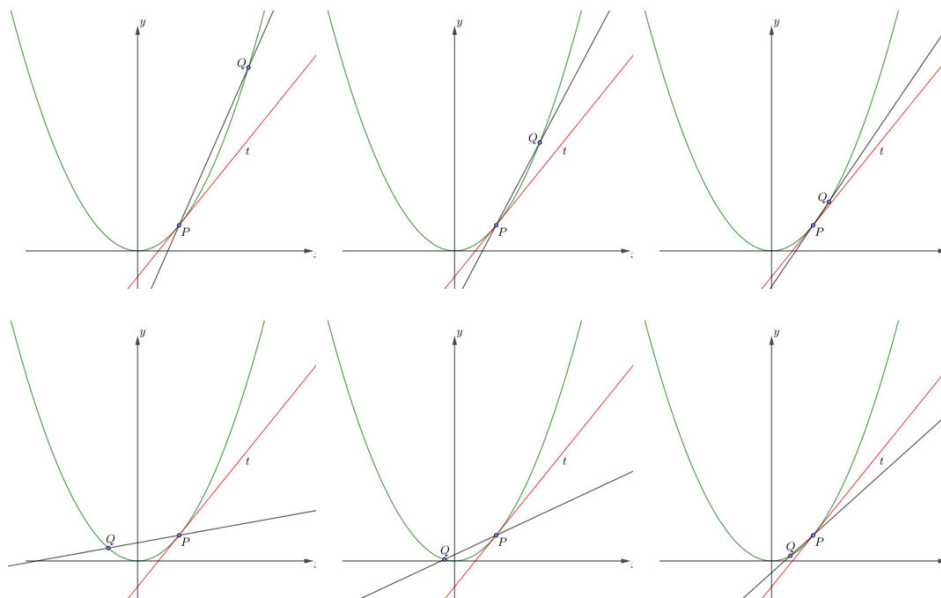
Nếu hệ số góc của tiếp tuyến đúng thực là 2 thì phương trình đường thẳng có hệ số góc bằng 2 đi qua điểm  $(1, 1)$  như sau

$$y - 1 = 2(x - 1) \quad \text{hay là} \quad y = 2x - 1.$$

Như vậy ý then chốt là: tiếp tuyến tại  $P$  chính là “giới hạn” của cát tuyến  $PQ$  khi “ $P$  tiến về  $Q$ ”. Xem minh họa ở Hình 2.1.3

## Bài toán vận tốc

Khi ta di chuyển, vận tốc của ta thay đổi. Vận tốc vốn được hiểu là tỉ số giữa chiều dài quãng đường đi được với khoảng thời gian được dùng để đi. Nhưng đó là tốc độ trung bình. Nếu ngồi trên một chiếc xe, nhìn bảng đo vận tốc của xe ta sẽ thấy nó liên tục thay đổi, mỗi khi ta nhìn đồng hồ đo vận tốc thì thấy có vận tốc nhất định. Đây chính là **vận**



Hình 2.1.3: Tiếp tuyến tại  $P$  là giới hạn của cát tuyến  $PQ$  khi  $Q$  tiến về  $P$  từ bên phải (ảnh phía trên) và từ bên trái (ảnh phía dưới).

**tốc tức thời**, một khái niệm phổ biến trong đời sống. Nhưng vận tốc tức thời đó được hiểu chính xác như thế nào?

**Ví dụ 2.1.2.** Giả sử một quả bóng được thả rơi từ một vị trí cách mặt đất 450 mét. Gọi  $s(t)$  là quãng đường bóng rơi sau  $t$  giây, giả sử

$$s(t) = \frac{1}{2}9,8t^2,$$

với  $9,8 \text{ m/s}^2$  là hằng số trọng trường. Tìm vận tốc của quả bóng sau 5 giây.

Ta có thể xấp xỉ vận tốc tức thời này cần tính bằng cách tính vận tốc trung bình trên một khoảng thời gian cụ thể từ 5 đến 5,1 giây:

$$\text{vận tốc trung bình} = \frac{\text{khoảng cách đi được}}{\text{lượng thời gian trôi qua}} = \frac{s(5,1) - s(5)}{0,1} = 49,49 \text{ m/s}.$$

Bảng dưới cho ta tính toán vận tốc trung bình trên khoảng thời gian nhỏ dần:

Khoảng thời gian	Vận tốc trung bình
$5 \leq t \leq 6$	53,9
$5 \leq t \leq 5,1$	49,49
$5 \leq t \leq 5,05$	49,245
$5 \leq t \leq 5,01$	49,049
$5 \leq t \leq 5,001$	49,0049

Ta thấy khi khoảng thời gian ngắn đi thì vận tốc trung bình tiến gần hơn đến 49 m/s. Vậy vận tốc tức thời vào thời điểm 5 giây sau khi bắt đầu chuyển động là 49 m/s.

Như vậy “vận tốc tức thời” tại thời điểm  $t$  chính là “giới hạn” của vận tốc trung bình trên khoảng thời gian từ  $t$  tới  $t'$  khi  $t'$  “tiến về”  $t$ .

## Tỉ lệ thay đổi

Cả hai bài toán tìm hệ số góc của tiếp tuyến và tìm vận tốc tức thời đều đưa về một bài toán chung: Tìm “giới hạn” của đại lượng

$$\frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

khi  $x$  “tiến về”  $a$ . Số thực này đo tỉ lệ lượng thay đổi của một đại lượng ( $f(x)$ ) so với lượng thay đổi của một đại lượng mà nó phụ thuộc vào ( $x$ ) tại giá trị nhất định của đại lượng đó ( $a$ ). Nó cho ta một số đo phản ánh đại lượng  $f(x)$  thay đổi như thế nào khi  $x$  thay đổi. Đây là một đại lượng then chốt khi ta khảo sát các hiện tượng trong thế giới, là đề tài và công cụ chủ yếu của phép tính vi tích phân, được gọi là đạo hàm mà ta sẽ tìm hiểu chi tiết ở chương tiếp theo. Chúng ta thấy rằng để xây dựng khái niệm này cần xây dựng khái niệm “giới hạn” trước. Ta làm điều này trong chương này.

### 2.1.2 Giới hạn của hàm số

Giả sử hàm số  $f(x)$  xác định khi  $x$  gần số  $a$  nhưng có thể trừ ra  $a$ . Khi đó ta viết

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$$

và nói “giới hạn của hàm số  $f(x)$  khi  $x$  tiến gần lại  $a$  là  $L$ ” nếu  $f(x)$  gần  $L$  tùy ý miễn  $x$  đủ gần  $a$  nhưng không bằng  $a$ .

Trong nhiều trường hợp khái niệm giới hạn có thể được diễn tả đơn giản hơn: khi  $x$  càng gần tới  $a$  thì  $f(x)$  càng gần tới  $L$ .

**Ví dụ 2.1.3.** Cho  $f$  là một hàm hằng, nghĩa là có một số thực  $c$  sao cho  $f(x) = c$  với mọi  $x \in \mathbb{R}$ . Rõ ràng, với mọi  $a \in \mathbb{R}$ , khi  $x$  gần tới  $a$  thì  $f(x)$  gần, thực ra luôn bằng,  $c$ . Vậy  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = c$ , hay ngắn gọn hơn:

$$\lim_{x \rightarrow a} c = c.$$

**Ví dụ 2.1.4.** Cho  $f(x) = x$  với mọi  $x \in \mathbb{R}$ . Rõ ràng, với mọi  $a \in \mathbb{R}$ , khi  $x$  gần tới  $a$  thì  $f(x) = x$  cũng gần tới  $a$ . Vậy

$$\lim_{x \rightarrow a} x = a.$$

Chú ý giả thiết  $x \neq a$  trong khái niệm giới hạn. Mục đích của điều này là để cho phép ta xét những giới hạn tại những điểm mà hàm không được xác định, như trong ví dụ dưới đây.

**Ví dụ 2.1.5.** Xét

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x - 1}{x^2 - 1}.$$

Khi  $x$  gần 1 nhưng khác 1 ta có

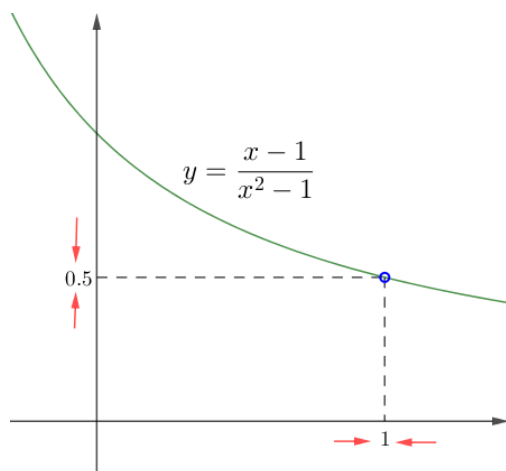
$$\frac{x - 1}{x^2 - 1} = \frac{1}{x + 1},$$

mặc dù hai vế không bằng nhau khi  $x = 1$ . Do đó

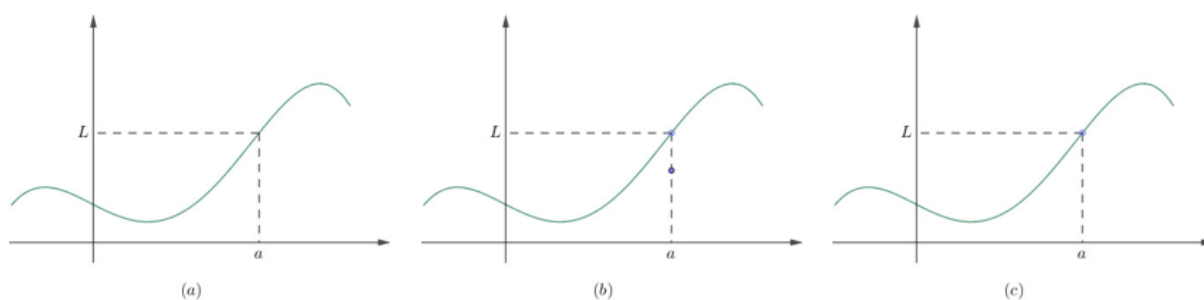
$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x - 1}{x^2 - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{x + 1}.$$

Có thể dự đoán giá trị của giới hạn này là  $\frac{1}{2}$ , xem Hình 2.1.4.

Như vậy khi tìm giới hạn của  $f(x)$  khi  $x$  tiến đến  $a$  ta không cần xét và sẽ không xét  $x = a$ . Hàm  $f$  thậm chí không cần được xác định tại  $x = a$ . Giới hạn tại  $a$  không phụ thuộc vào  $f$  như thế nào tại  $a$ , chỉ phụ thuộc việc  $f$  như thế nào gần  $a$  mà thôi. Xem Hình 2.1.5.



Hình 2.1.4

Hình 2.1.5:  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$  trong cả ba trường hợp.

## Định nghĩa chính xác của giới hạn

Ở mục này khái niệm giới hạn được chính xác hóa và được viết ở dạng kí hiệu, tương tự như cách viết khái niệm giới hạn của dãy ở Định nghĩa 1.1.13. Tuy có vẻ hơi trừu tượng và hơi phức tạp, nhưng cách viết này chỉ là thể hiện lượng hóa khái niệm giới hạn ở trên, và giúp chúng ta chứng minh được chặt chẽ các tính chất căn bản của giới hạn.

Điểm  $a \in D$  được gọi là một **điểm tụ** hay **điểm giới hạn** của  $D$  nếu mọi khoảng mở của  $\mathbb{R}$  chứa  $a$  đều chứa một điểm của  $D$  khác  $a$ . Không khó thấy điều này đồng nghĩa với việc có một dãy các phần tử của  $D$  khác  $a$  mà hội tụ về  $a$ . Chú ý một điểm tụ  $a$  của tập  $D$  không nhất thiết phải thuộc  $D$ , nhưng luôn có phần tử của  $D$  không phải là  $a$  mà gần  $a$  tùy ý. Ngược lại không nhất thiết mọi điểm của  $D$  là một điểm tụ của  $D$ .

**Ví dụ 2.1.6.** Điểm 0 là một điểm tụ của tập  $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ . Điểm 0 không phải là một điểm tụ của tập  $\{0\} \cup (1, \infty)$ .

**Định nghĩa 2.1.7.** Cho  $f$  là một hàm số được xác định trên tập  $D$  và  $a$  là một điểm tụ của  $D$ . Ta nói **giới hạn** của  $f(x)$  khi  $x$  tiến đến  $a$  là  $L$ , viết là

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$$

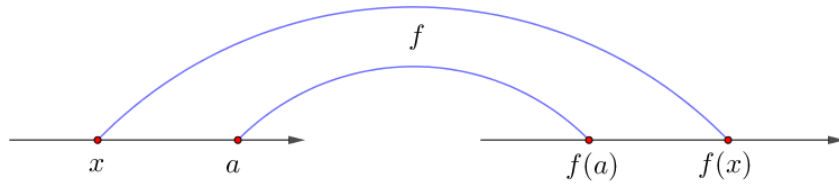
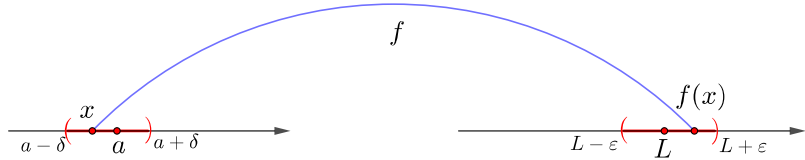
nếu với mọi  $\epsilon > 0$  có một số  $\delta > 0$  sao cho với mọi  $x \in D$  nếu  $0 < |x - a| < \delta$  thì  $|f(x) - L| < \epsilon$ . Hoàn toàn bằng kí hiệu:

$$\forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall x \in D, 0 < |x - a| < \delta \implies |f(x) - L| < \epsilon$$

hay

$$\forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall x \in D \cap ((a - \delta, a + \delta) \setminus \{a\}), f(x) \in (L - \epsilon, L + \epsilon).$$



Hình 2.1.6: Hàm số  $f$ .Hình 2.1.7: Giới hạn của hàm số  $f$ .

Định nghĩa này còn gọi là “định nghĩa  $\epsilon - \delta$ ”. Sau đây là một số ví dụ để minh họa.

**Ví dụ 2.1.8.** Kiểm rằng  $\lim_{x \rightarrow 2} (2x - 1) = 3$ .

Bước 1: Phân tích để dự đoán  $\delta$ . Cho trước  $\epsilon > 0$ , ta muốn tìm  $\delta > 0$  sao cho nếu  $|x - 2| < \delta$  thì  $|(2x - 1) - 3| < \epsilon$ . Vì  $|(2x - 1) - 3| = |2x - 4| = 2|x - 2|$  nên nếu  $|(2x - 1) - 3| < \delta$  thì  $2|x - 2| < \delta$ . Từ đây ta dự đoán  $\delta = \epsilon/2$ .

Bước 2: Chứng minh. Cho trước một  $\epsilon > 0$ , chọn  $\delta = \epsilon/2$ . Nếu  $0 < |x - 2| < \delta$  thì

$$|(2x - 1) - 3| = 2|x - 2| < 2\delta = \epsilon.$$

Vậy

$$\lim_{x \rightarrow 2} (2x - 1) = 3.$$

**Ví dụ 2.1.9.** Kiểm rằng  $\lim_{x \rightarrow 2} x^2 = 4$ .

Bước 1: Dự đoán số  $\delta$ . Cho trước  $\epsilon > 0$ , ta tìm số  $\delta > 0$  sao cho nếu  $0 < |x - 2| < \delta$  thì  $|x^2 - 4| < \epsilon$ . Ta có  $|x^2 - 4| = |(x - 2)(x + 2)|$ . Ta quan tâm đến những  $x$  gần 2 nên ta có thể giả sử  $x$  cách 2 không quá 1, nghĩa là  $|x - 2| < 1$ , hay  $1 < x < 3$ , do đó  $3 < x + 2 < 5$ . Khi đó

$$|x^2 - 4| = |(x - 2)(x + 2)| < 5|x - 2| < 5\delta.$$

Để chắc chắn rằng bất đẳng thức trên được thoả mãn ta có thể lấy  $\delta$  là số nhỏ hơn trong hai số 1 và  $\epsilon/5$  tức là  $\delta = \min\{1, \epsilon/5\}$ .

Bước 2: Chứng minh. Cho  $\epsilon > 0$ , chọn  $\delta = \min\{1, \epsilon/5\}$ . Nếu  $0 < |x - 2| < \delta$ , thì  $|x - 2| < 1$  do đó  $|x + 2| < 5$ , và  $|x - 2| < \epsilon/5$ , nên

$$|x^2 - 4| = |(x - 2)(x + 2)| < (\epsilon/5)5 = \epsilon.$$

Vậy

$$\lim_{x \rightarrow 2} x^2 = 4.$$

Khi đã thông thạo hơn lí luận này thì người ta thường chỉ cần viết ra Bước 1 ở trên chứ không cần viết ra Bước 2 nữa.

Ta thấy việc dùng định nghĩa để tìm giới hạn của một hàm số tương đối khó. Từ định nghĩa chúng ta sẽ phát triển những tính chất và công thức ở mục tiếp theo, nhờ đó làm việc với giới hạn sẽ dễ dàng hơn.

Yêu cầu rằng điểm tại đó ta xét giới hạn phải là một điểm tụ của miền xác định giúp đảm bảo giới hạn nếu tồn tại là duy nhất.

**Mệnh đề 2.1.10.** *Giới hạn nếu tồn tại là duy nhất.*

*Chứng minh.* Giả sử  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$  và  $a$  là một điểm tụ của  $D$ . Giả sử  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L_1$  và  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L_2$ . Cho  $\epsilon > 0$ , có  $\delta_1 > 0$  sao cho khi  $x \in D$  và  $0 < |x - a| < \delta_1$  thì  $|f(x) - L_1| < \epsilon$ , và có  $\delta_2 > 0$  sao cho khi  $x \in D$  và  $0 < |x - a| < \delta_2$  thì  $|f(x) - L_2| < \epsilon$ . Lấy  $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$ . Vì  $a$  là một điểm tụ của  $D$  nên có  $x \in D$  sao cho  $0 < |x - a| < \delta$ . Với  $x$  này thì ta có

$$|L_1 - L_2| \leq |f(x) - L_1| + |f(x) - L_2| < 2\epsilon.$$

Điều này đúng với mọi số dương  $\epsilon$ , nên bắt buộc  $L_1 = L_2$ .  $\square$

### 2.1.3 Một số tính chất căn bản của giới hạn

Sau đây ta có các tính chất số học căn bản cho giới hạn của hàm số, tương tự các kết quả cho dãy ở Định lý 1.1.19, và có thể được chứng minh một cách tương tự.

**Định lý 2.1.11.** *Giả sử các giới hạn  $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$  và  $\lim_{x \rightarrow a} g(x)$  tồn tại. Khi đó các giới hạn ở vế trái của các đẳng thức dưới đây tồn tại và bằng vế phải:*

$$(a) \lim_{x \rightarrow a} [f(x) + g(x)] = \lim_{x \rightarrow a} f(x) + \lim_{x \rightarrow a} g(x).$$

$$(b) \lim_{x \rightarrow a} [f(x) - g(x)] = \lim_{x \rightarrow a} f(x) - \lim_{x \rightarrow a} g(x).$$

$$(c) \lim_{x \rightarrow a} [f(x) \cdot g(x)] = \lim_{x \rightarrow a} f(x) \cdot \lim_{x \rightarrow a} g(x).$$

$$(d) \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x \rightarrow a} f(x)}{\lim_{x \rightarrow a} g(x)} \text{ nếu } \lim_{x \rightarrow a} g(x) \neq 0.$$

*Chứng minh.* Có thể chứng minh mệnh đề này giống như chứng minh mệnh đề tương ứng cho giới hạn của dãy ở Định lý 1.1.19. Để minh họa dưới đây là chi tiết cho tính chất (a).

Đặt  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = M$  và  $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = N$ . Cho  $\epsilon > 0$ , có  $\delta_1 > 0$  sao cho khi  $x \in D$  và  $0 < |x - a| < \delta_1$  thì  $|f(x) - M| < \epsilon/2$ , và có  $\delta_2 > 0$  sao cho khi  $x \in D$  và  $0 < |x - a| < \delta_2$  thì  $|g(x) - N| < \epsilon/2$ . Lấy  $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$ . Với mọi  $x \in D$  sao cho  $0 < |x - a| < \delta$  thì ta có

$$|(f(x) + g(x)) - (M + N)| \leq |f(x) - M| + |g(x) - N| < \epsilon/2 + \epsilon/2 = \epsilon.$$

Theo định nghĩa thì điều này thể hiện rằng  $f(x) + g(x)$  hội tụ về  $M + N$ .  $\square$

**Ví dụ 2.1.12.** Tính  $\lim_{x \rightarrow 2} 3x^2 - 4x + 5$ .

Áp dụng các tính chất của giới hạn ở trên, ta viết

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 2} 3x^2 - 4x + 5 &= \lim_{x \rightarrow 2} 3x^2 + \lim_{x \rightarrow 2} -4x + \lim_{x \rightarrow 2} 5 \\ &= \left( \lim_{x \rightarrow 2} 3 \right) \left( \lim_{x \rightarrow 2} x \right) \left( \lim_{x \rightarrow 2} x \right) + \left( \lim_{x \rightarrow 2} -4 \right) \left( \lim_{x \rightarrow 2} x \right) + \lim_{x \rightarrow 2} 5 \\ &= 3 \left( \lim_{x \rightarrow 2} x \right)^2 - 4 \lim_{x \rightarrow 2} x + 5 = 3 \cdot 2^2 - 4 \cdot 2 + 5. \end{aligned}$$

Về sau ta sẽ viết tắt và bỏ bớt các bước trên.

**Ví dụ 2.1.13.** Với  $n$  là một số nguyên dương thì áp dụng tính chất giới hạn của tích:

$$\lim_{x \rightarrow a} x^n = \left(\lim_{x \rightarrow a} x\right)^n = a^n.$$

Hai ví dụ trên chỉ ra rằng giới hạn của đa thức nhận được bằng cách đơn giản là thế số vào. Chính xác, nếu  $p$  là một đa thức thì

$$\lim_{x \rightarrow a} p(x) = p(a).$$

Tiếp theo, nhờ tính chất giới hạn của thương, giới hạn của một phân thức cũng thu được bằng cách thế số vào, miễn là không phải chia cho 0, tức là nếu  $p$  và  $q$  là hai đa thức thì

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{p(x)}{q(x)} = \frac{p(a)}{q(a)},$$

nếu  $q(a) \neq 0$ .

**Ví dụ 2.1.14.** Tìm

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - 1}{x^2 - 1}.$$

Trước hết nhận xét rằng hàm số trên không xác định tại điểm tính giới hạn. Tuy nhiên ta có thể biến đổi bằng cách phân tích thành tích rồi thu gọn để được một hàm số mới đơn giản hơn mà chỉ khác hàm số ban đầu tại đúng một điểm, chính là điểm tính giới hạn. Cụ thể:

$$\frac{x^3 - 1}{x^2 - 1} = \frac{(x - 1)(x^2 + x + 1)}{(x - 1)(x + 1)} = \frac{x^2 + x + 1}{x + 1},$$

với mọi  $x \neq 1$ . Áp dụng các tính chất của giới hạn ta được

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - 1}{x^2 - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 + x + 1}{x + 1} = \frac{1^2 + 1 + 1}{1 + 1} = \frac{3}{2}.$$

Tiếp theo ta có các mệnh đề về so sánh giới hạn, tương tự các kết quả cho dãy ở Định lý 1.1.20, và có thể được chứng minh một cách tương tự.

**Định lý 2.1.15 (Tính chất so sánh).** Nếu  $f(x) \leq g(x)$  khi  $x$  gần  $a$  (có thể ngoại trừ điểm  $a$ ) và các giới hạn của hàm số  $f$  và  $g$  tồn tại khi  $x$  tiến đến  $a$  thì

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) \leq \lim_{x \rightarrow a} g(x).$$

Ta có ngay một hệ quả thường được dùng:

**Định lý 2.1.16 (Tính chất kẹp).** Nếu  $f(x) \leq g(x) \leq h(x)$  khi  $x$  gần  $a$  (có thể ngoại trừ điểm  $a$ ) và  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{x \rightarrow a} h(x) = L$  thì

$$\lim_{x \rightarrow a} g(x) = L.$$

**Ví dụ 2.1.17.** Tìm

$$\lim_{x \rightarrow 0} x^2 \sin \frac{1}{x}.$$

Với mọi  $x \neq 0$  ta có các bất đẳng thức sau

$$-1 \leq \sin \frac{1}{x} \leq 1,$$

nên

$$-x^2 \leq x^2 \sin \frac{1}{x} \leq x^2.$$

Vì  $\lim_{x \rightarrow 0} -x^2 = \lim_{x \rightarrow 0} x^2 = 0$  nên theo tính chất kẹp ở trên ta kết luận

$$\lim_{x \rightarrow 0} x^2 \sin \frac{1}{x} = 0.$$

## \* Giới hạn của hàm số thông qua giới hạn của dãy số

Dưới đây trình bày định nghĩa giới hạn thông qua dãy số, một công cụ có thể quen thuộc với người đọc hơn.

**Mệnh đề 2.1.18.** Cho  $a$  là một điểm tụ của miền xác định của hàm số  $f$ . Hai điều sau là tương đương:

$$(a) \lim_{x \rightarrow a} f(x) = L.$$

(b) Với mọi dãy  $\{x_n\}_{n \geq 1}$  hội tụ về  $a$ , dãy số  $\{f(x_n)\}_{n \geq 1}$  hội tụ về  $L$ . Nói cách khác, với mọi dãy  $\{x_n\}_{n \geq 1}$  thì

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a \implies \lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = L.$$

Chứng minh không khó, người đọc có thể thử làm, hoặc tham khảo trong các tài liệu như [Kha96].

Dùng mệnh đề này ta có thể nhận được những tính chất căn bản của giới hạn của hàm số trực tiếp từ các tính chất tương ứng của giới hạn của dãy số.

Một ứng dụng khác là dùng để chỉ ra hàm số không có giới hạn.

**Hệ quả 2.1.19.** Nếu một trong hai điều sau xảy ra thì hàm số  $f$  không có giới hạn tại  $a$ :

(a) có một dãy  $\{x_n\}_{n \geq 1}$  sao cho  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$  nhưng dãy  $\{f(x_n)\}_{n \geq 1}$  phân kỳ,

(b) có hai dãy  $\{x_n\}_{n \geq 1}$  và  $\{y_n\}_{n \geq 1}$  sao cho

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \lim_{n \rightarrow \infty} y_n = a$$

nhưng

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) \neq \lim_{n \rightarrow \infty} f(y_n).$$

**Ví dụ 2.1.20.** Tìm giới hạn  $\lim_{x \rightarrow 0} \sin \frac{1}{x}$ .

Ta tìm được

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2n\pi} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2n\pi + \frac{\pi}{2}} = 0,$$

nhưng

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sin 2n\pi = 0, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \sin \left(2n\pi + \frac{\pi}{2}\right) = 1.$$

Vậy giới hạn  $\lim_{x \rightarrow 0} \sin \frac{1}{x}$  không tồn tại.

## 2.1.4 Các giới hạn mở rộng

### Giới hạn một phía

Trong nhiều trường hợp ta muốn xét những giới hạn như

$$\lim_{x \rightarrow 0} \sqrt{x}.$$

Ở đây ta chỉ có thể xét  $x$  gần 0 nhưng lớn hơn 0. Do đó bây giờ ta định nghĩa giới hạn một phía của hàm số.

Ta viết

$$\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = L$$

và nói **giới hạn bên trái** của hàm số  $f(x)$  khi  $x$  tiến đến  $a$ , hay giới hạn của  $f(x)$  khi  $x$  tiến đến  $a$  từ bên trái, là  $L$  nếu giá trị của  $f(x)$  gần tùy ý  $L$  khi giá trị của  $x$  đủ gần  $a$  nhưng nhỏ hơn  $a$ . Ký hiệu " $x \rightarrow a^-$ " có nghĩa là ta chỉ xem xét  $x < a$ .

Viết hoàn toàn bằng kí hiệu thì  $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = L$  nếu

$$\forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall x \in D, -\delta < x - a < 0 \implies |f(x) - L| < \epsilon.$$

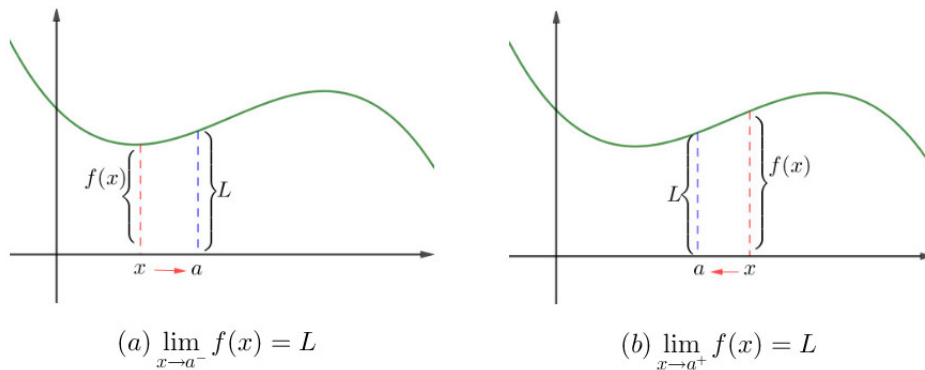
Tương tự nếu ta yêu cầu  $x$  lớn hơn  $a$  ta sẽ có **giới hạn bên phải** của  $f(x)$  khi  $x$  tiến đến  $a$  là  $L$  và ký hiệu là

$$\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = L$$

nếu giá trị của  $f(x)$  gần tùy ý  $L$  khi giá trị của  $x$  đủ gần  $a$  nhưng lớn hơn  $a$ . Viết hoàn toàn bằng kí hiệu thì  $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = L$  nếu

$$\forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall x \in D, 0 < x - a < \delta \implies |f(x) - L| < \epsilon.$$

Các định nghĩa này được minh họa trong Hình 2.1.8.



Hình 2.1.8: Giới hạn bên trái và bên phải.

**Ví dụ 2.1.21.** Tìm  $\lim_{x \rightarrow 0^+} \sqrt{x}$ .

Cho  $\epsilon > 0$ . Ta có  $\sqrt{x} - 0 < \epsilon \iff 0 \leq x < \epsilon^2$ . Vậy lấy  $\delta = \epsilon^2$  thì  $0 < x - 0 < \delta \implies |\sqrt{x} - 0| < \epsilon$ . Ta kết luận  $\lim_{x \rightarrow 0^+} \sqrt{x} = 0$ .

Sau đây là một mệnh đề giúp ta nhận biết sự tồn tại giới hạn của một hàm số tại một điểm.

**Mệnh đề 2.1.22.** Ta có  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$  khi và chỉ khi  $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = L$  và  $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = L$ .

Như vậy hàm số sẽ không có giới hạn tại một điểm nếu không tồn tại một giới hạn một bên tại điểm đó, hoặc nếu cả hai giới hạn một bên tồn tại nhưng có giá trị khác nhau.

Có lẽ không khó để thấy tính đúng đắn của tính chất trên sau một chút suy nghĩ. Một chứng minh chi tiết có dưới đây.

*Chứng minh.* Nếu  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$  thì dĩ nhiên  $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = L$  và  $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = L$ .

Ngược lại giả sử  $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = L$  và  $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = L$ . Cho  $\epsilon > 0$ , có  $\delta_1 > 0$  sao cho khi  $x \in D$  và  $0 < x - a < \delta_1$  thì  $|f(x) - L| < \epsilon$ , và có  $\delta_2 > 0$  sao cho khi  $x \in D$  và  $0 < a - x < \delta_2$  thì  $|f(x) - L| < \epsilon$ . Lấy  $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$ . Với mọi  $x \in D$  sao cho  $0 < |x - a| < \delta$  thì  $|f(x) - L| < \epsilon$ . Vậy  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$ .  $\square$

**Ví dụ 2.1.23.** Tìm giới hạn của

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{|x|}{x}.$$

Vì

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{|x|}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x}{x} = 1$$

và

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{|x|}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{-x}{x} = -1$$

là hai số khác nhau nên giới hạn  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{|x|}{x}$  không tồn tại.

## Giới hạn ở vô cùng

**Định nghĩa 2.1.24.** Cho hàm số  $f$  được xác định khi  $a$  đủ lớn. Ta nói giới hạn của  $f$  khi  $x$  tiến tới vô cùng là số thực  $L$ , và viết

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = L$$

nếu  $f(x)$  gần  $L$  tùy ý miễn  $x$  đủ lớn. Chính xác hơn, nếu với mọi số dương  $\epsilon$  tồn tại một số dương  $M$  sao cho nếu  $x > M$  thì  $|f(x) - L| < \epsilon$ .

Tương tự ta nói

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = L$$

nếu  $f(x)$  gần  $L$  tùy ý miễn  $x$  đủ nhỏ. Chính xác hơn, nếu với mọi số dương  $\epsilon$  tồn tại một số dương  $M$  sao cho nếu  $x < -M$  thì  $|f(x) - L| < \epsilon$ .

**Ví dụ 2.1.25.** Có thể thấy ngay:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x} = 0,$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x} = 0.$$

Như đã thảo luận ở phần dẫy ở Ghi chú 1.1.18, kí hiệu  $\infty$  không thể hiện một số thực, mà thể hiện một loại giới hạn, và chỉ có ý nghĩa trong ngữ cảnh đó. Kí hiệu này được đọc là **vô cùng**, hay **vô hạn**, hay **vô cực**.

Giới hạn ở vô cùng có cùng các tính chất với giới hạn tới một số thực như ở Mệnh đề 2.1.11, với chứng minh tương tự.

**Ví dụ 2.1.26.** Tìm

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x - 1}{3x + 4}.$$

Dùng các tính chất của giới hạn ta viết

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x - 1}{3x + 4} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x(2 - \frac{1}{x})}{x(3 + \frac{4}{x})} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2 - \frac{1}{x}}{3 + \frac{4}{x}} = \frac{2 - 0}{3 + 0} = \frac{2}{3}.$$

## Giới hạn bằng vô cùng

**Định nghĩa 2.1.27.** Cho hàm số  $f$  được xác định ở gần  $a$  nhưng có thể không xác định tại  $a$ . Ta nói giới hạn của  $f$  khi  $x$  tiến tới  $a$  là vô cùng và viết

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \infty$$

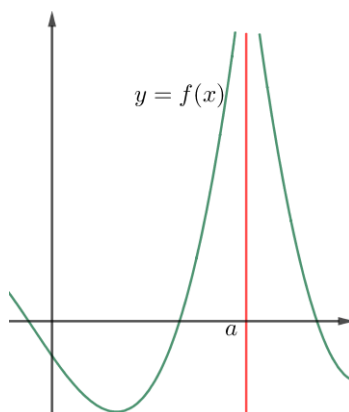
nếu  $f(x)$  lớn tùy ý miễn  $x$  đủ gần nhưng không bằng  $a$ . Chính xác hơn, nếu với mọi số dương  $M$  tồn tại một số dương  $\delta$  sao cho nếu  $0 < |x - a| < \delta$  thì  $f(x) > M$ .

Tương tự ta có thể nói tới giới hạn bằng âm vô cùng. Ta nói

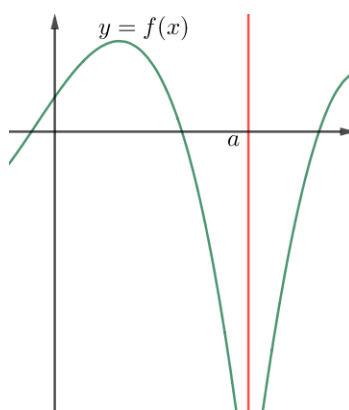
$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = -\infty$$

nếu  $f(x)$  nhỏ tùy ý miễn  $x$  đủ gần nhưng không bằng  $a$ . Chính xác hơn, nếu với mọi số dương  $M$  tồn tại một số dương  $\delta$  sao cho nếu  $0 < |x - a| < \delta$  thì  $f(x) < -M$ .

Định nghĩa này được minh họa trong Hình 2.1.9, 2.1.10, và 2.1.11.



Hình 2.1.9:  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \infty$ .



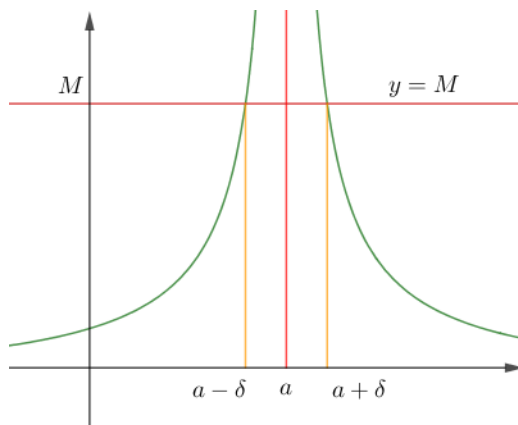
Hình 2.1.10:  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = -\infty$ .

**Ví dụ 2.1.28.** Không khó để thấy

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^2} = \infty$$

và

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{-1}{x^2} = -\infty.$$

Hình 2.1.11: Minh họa  $|x - a| < \delta \implies f(x) > M$ .

Cuối cùng, chúng ta còn có thể kết hợp tất cả các loại giới hạn trên.

**Ví dụ 2.1.29.** Ta có

$$\lim_{x \rightarrow \infty} x = \infty,$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} x^2 = \infty,$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} x^2 = \infty,$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} x^3 = -\infty.$$

**Ví dụ 2.1.30.** Tìm  $\lim_{x \rightarrow \infty} 2x^3 - 4x^2 - 5x + 6$ .

Ta viết

$$\lim_{x \rightarrow \infty} 2x^3 - 4x^2 - 5x + 6 = \lim_{x \rightarrow \infty} x^3 \left( 2 - \frac{4}{x} - \frac{5}{x^2} + \frac{6}{x^3} \right).$$

Trong hai thừa số trên, một thừa số tiến ra  $\infty$ , còn thừa số còn lại tiến về 2, do đó tích rõ ràng tiến ra  $\infty$ . Người ta thường tóm tắt lí luận này bằng cách viết

$$\lim_{x \rightarrow \infty} x^3 \left( 2 - \frac{4}{x} - \frac{5}{x^2} + \frac{6}{x^3} \right) = \infty \cdot 2 = \infty.$$

## Bài tập

**2.1.1.** Tính các giới hạn sau:

(a)  $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{(10+h)^2 - 100}{h}$ .

(b)  $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sqrt{100+h} - 10}{h}$ .

(c)  $\lim_{x \rightarrow -2017} \frac{\frac{1}{2017} + \frac{1}{x}}{2017 + x}$ .

(d)  $\lim_{t \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+t} - \sqrt{1-t}}{t}$ .

(e)  $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{2 - \sqrt{x}}{8x - x^3}$ .

(f)  $\lim_{t \rightarrow 0} \left( \frac{1}{t\sqrt{1+t}} - \frac{1}{t} \right)$ .



$$(g) \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(x+h)^3 - x^3}{h}.$$

2.1.2. Sử dụng định lý kẹp chỉ ra

$$\lim_{x \rightarrow 0} (x^2 \cos 20\pi x) = 0.$$

2.1.3. Sử dụng định lý kẹp chỉ ra

$$\lim_{x \rightarrow 0} \sqrt{x^3 + x^2} \sin \frac{\pi}{x} = 0.$$

2.1.4. Nếu  $4x - 9 \leq f(x) \leq x^2 - 4x + 7$  với  $x \geq 0$ . Tìm  $\lim_{x \rightarrow 4} f(x)$ .

2.1.5. Nếu  $2x \leq g(x) \leq x^4 - x^2 + 2$  với mọi  $x$ . Tìm  $\lim_{x \rightarrow 1} g(x)$ .

2.1.6. Chứng minh rằng

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \sqrt{x} [1 + \sin^2(2\pi/x)] = 0.$$

2.1.7. Tìm giới hạn sau nếu tồn tại:

(a)

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{x-1}{|x^3 - x^2|}$$

(b)

$$\lim_{x \rightarrow -7} \frac{7 - |x|}{x^2 + 3x + 2}$$

(c)

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \left( \frac{1}{x} - \frac{1}{|x|} \right).$$

2.1.8. Cho

$$g(x) = \begin{cases} x^2 - 1 & \text{nếu } x < 1 \\ 0 & \text{nếu } x = 1 \\ 2x - x^2 & \text{nếu } 1 < x \leq 2 \\ x^3 - 5x + 4 & \text{nếu } x > 2. \end{cases}$$

Tìm các giới hạn sau nếu tồn tại

(a)  $\lim_{x \rightarrow 1^-} g(x)$

(b)  $\lim_{x \rightarrow 1^+} g(x)$

(c)  $\lim_{x \rightarrow 2^-} g(x)$

(d)  $\lim_{x \rightarrow 2^+} g(x)$

(e)  $\lim_{x \rightarrow 2} g(x)$ .

2.1.9. Nếu

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{nếu } x \text{ là số hữu tỉ} \\ 0 & \text{nếu } x \text{ là số vô tỉ.} \end{cases}$$

Chứng minh rằng  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0$ .

2.1.10. Có số  $a$  nào sao cho

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{2x^2 - 2ax - a - 1}{x^3 - 3x - 2}$$

tồn tại không? Tìm giới hạn đó.

2.1.11. Cho  $f(x) = \frac{x^2 - x - 6}{x^2 + x - 2}$ . Tìm:

a)  $\lim_{x \rightarrow 2} f(x)$ .

b)  $\lim_{x \rightarrow -2} f(x)$ .

c)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ .

2.1.12. Tìm;

a).  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{4x^2 + 3x + 7}{-3x^3 + 6x}$ .

b).  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{4x^4 + 3x + 7}{-3x^3 + 6x}$ .

2.1.13. Chọn đáp án đúng.

(a) Giới hạn

$$\lim_{x \rightarrow 1} 4x^3 - 3x^2 + 3x - 1$$

bằng

A) 1    B) 2    C) 3    D)  $\infty$

(b) Giới hạn

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} 4x^3 - 3x^2 + 3x - 1$$

bằng

A) 5    B)  $-\infty$     C)  $\infty$     D) không tồn tại

(c) Giới hạn

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} 9x^4 - 8x^2 + 9x + 5$$

bằng

A) 2    B)  $\infty$     C)  $-\infty$     D) không tồn tại

(d) Giới hạn

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-3x^4 - 9x^2 - 6x + 1}{8x^5 - 3x^3 + 7x^2 + 16}$$

bằng

A) -3    B)  $-\infty$     C) 0    D) không tồn tại

(e) Giới hạn

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{12x^4 - 4x^2 + 9x + 11}{2x^4 - 15x^2 + 71x + 60}$$

bằng

A) 0    B)  $-\infty$     C) 6    D) không tồn tại

## 2.2 Hàm số liên tục

**Định nghĩa 2.2.1.** Hàm số  $f$  xác định trên tập  $D$  được gọi là **liên tục** tại  $a \in D$  nếu  $f(x)$  gần  $f(a)$  tùy ý miễn  $x$  đủ gần  $a$ . Hoàn toàn bằng kí hiệu thì:

$$\forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall x \in D, |x - a| < \delta \implies |f(x) - f(a)| < \epsilon$$

hay

$$\forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall x \in D \cap (a - \delta, a + \delta), f(x) \in (f(a) - \epsilon, f(a) + \epsilon).$$

Hàm số  $f$  không liên tục tại  $a$  thì còn được gọi là **gián đoạn** tại  $a$ .

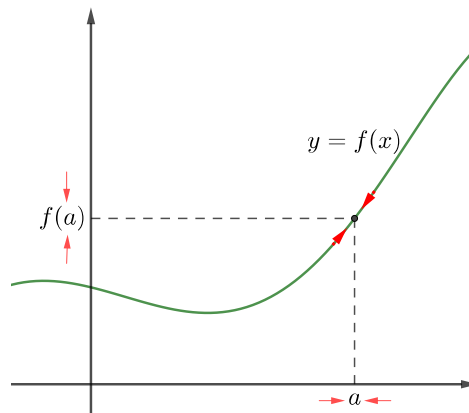
Hàm số  $f$  được gọi là liên tục trên tập  $D$  nếu nó liên tục tại mọi điểm thuộc  $D$ .

Có thể trình bày một cách tương đương sự liên tục thông qua giới hạn. Hàm số  $f$  xác định trên tập  $D$  là liên tục tại  $a \in D$  nếu hoặc  $a$  không phải là một điểm tụ của  $D$  hoặc nếu  $a$  là một điểm tụ của  $D$  thì

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a).$$

Ta chú ý để hàm liên tục tại  $a$  thì  $a$  phải thuộc miền xác định của hàm, tức là hàm phải có giá trị tại  $a$ . Mặt khác ta không cần phải yêu cầu  $a$  là một điểm tụ của miền xác định như trong định nghĩa giới hạn.

Trong nhiều trường hợp có thể diễn tả khái niệm liên tục một cách dễ hiểu hơn là khi  $x$  gần tới  $a$  thì  $f(x)$  gần tới  $f(a)$ . Nói cách khác, khi biến thiên  $\Delta x$  của biến  $x$  nhỏ đi thì biến thiên  $\Delta y$  của hàm phải nhỏ đi theo. Thô sơ hơn nữa, liên tục có nghĩa là một thay đổi “nhỏ” của biến độc lập chỉ dẫn tới một thay đổi “nhỏ” của biến phụ thuộc.



Hình 2.2.1: Nếu  $f$  liên tục tại  $a$  thì khi  $x$  tiến về  $a$  thì điểm  $(x, f(x))$  trên đồ thị tiến về điểm  $(a, f(a))$ , vì vậy không có lỗ thủng hay nét đứt trên đồ thị tại  $x = a$ .

Chú ý rằng định nghĩa 2.2.1 trên yêu cầu ba điều sau để  $f$  liên tục tại một điểm tụ  $a$ :

- (a)  $f(a)$  được xác định,
- (b)  $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$  tồn tại,
- (c)  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$ .

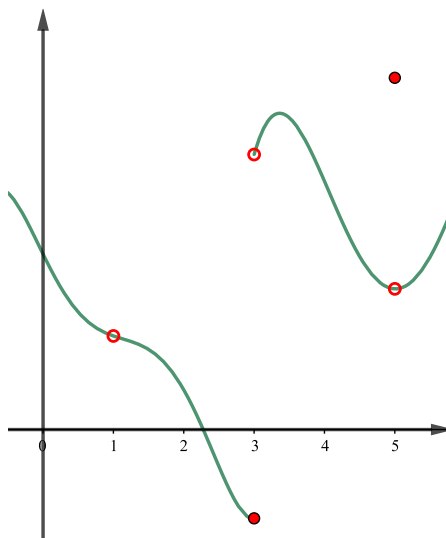
Như vậy một hàm số sẽ không liên tục tại  $a$  nếu nó vi phạm một trong các yêu cầu trên.

**Ví dụ 2.2.2.** Hình 2.2.2 là đồ thị hàm số  $f$ . Tìm điểm gián đoạn của hàm số  $f$ .

Hàm  $f$  gián đoạn tại điểm  $x = 1$  vì tại  $x = 1$  đồ thị bị thủng,  $f(1)$  không được định nghĩa. Đồ thị cũng bị đứt tại điểm  $x = 3$ ,  $\lim_{x \rightarrow 3} f(x)$  không tồn tại, nên  $f$  gián đoạn tại  $x = 3$ . Tại  $x = 5$  thì đồ thị lại bị thủng,  $\lim_{x \rightarrow 5} f(x) \neq f(5)$ , vì vậy  $x = 5$  cũng là một điểm gián đoạn.

### 2.2.1 Tính chất của hàm số liên tục

Sau đây là một loạt các định lý quan trọng cho hàm số liên tục. Kết quả này tới ngay từ kết quả tương ứng về giới hạn ở Định lý 2.1.11.



Hình 2.2.2: Ví dụ 2.2.2.

**Định lý 2.2.3.** Nếu  $f$  và  $g$  liên tục tại  $a$  thì các hàm số sau cũng liên tục tại  $a$ :  $f + g$ ,  $f - g$ ,  $fg$ , và  $\frac{f}{g}$  nếu  $g(a) \neq 0$ .

**Định lý 2.2.4.** Nếu  $g$  liên tục tại  $a$  và  $f$  liên tục tại  $g(a)$  thì hàm hợp  $f \circ g$  liên tục tại  $a$ .

*Chứng minh.* Cho  $\epsilon > 0$ . Vì  $f$  liên tục tại  $g(a)$  nên có  $\delta > 0$  sao cho khi  $|g(x) - g(a)| < \delta$  thì  $|f(g(x)) - f(g(a))| < \epsilon$ . Vì  $g$  liên tục tại  $a$  nên có  $\delta' > 0$  sao cho khi  $|x - a| < \delta'$  thì  $|g(x) - g(a)| < \delta$ . Như vậy khi  $|x - a| < \delta'$  thì  $|f(g(x)) - f(g(a))| < \epsilon$ . Theo định nghĩa thì điều này nói rằng  $f \circ g$  liên tục tại  $a$ .  $\square$

Xem lại phần giới hạn của hàm số sau Định lý 2.1.11 giờ ta nhận thấy rằng các hàm đa thức và phân thức đều liên tục.

Một trong những kết quả quan trọng nhất và thường dùng nhất về hàm liên tục trong môn học này là khẳng định rằng ***các hàm sơ cấp đều liên tục***.

**Định lý 2.2.5.** Các hàm số sơ cấp đều liên tục trên tập xác định của chúng.

Nhắc lại phần thảo luận ở Mục 1.2.1, ngoài một số trường hợp riêng như với hàm đa thức hay phân thức, chúng ta chưa nghiên cứu đủ về các hàm sơ cấp để có thể chứng minh kết quả này, và do đó sẽ chỉ chấp nhận nó. Có thể đọc thêm ở [TPTT02, tr. 64].

**Ví dụ 2.2.6.** Các hàm số  $h(x) = \cos(x^2)$  và  $k(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2+5}-3}$  liên tục trên tập hợp các số thực.

Tính liên tục của các hàm sơ cấp thường được dùng để tính giới hạn các hàm sơ cấp tại một điểm nằm trong miền xác định bằng cách thế trực tiếp  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$ .

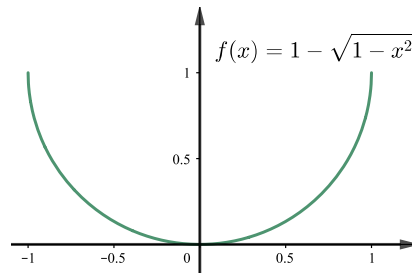
**Ví dụ 2.2.7.** Tìm

$$\lim_{x \rightarrow \pi} \frac{x^2 + x \sin x}{2018 + \cos x}.$$

Vì hàm số trên là một hàm sơ cấp nên

$$\lim_{x \rightarrow \pi} \frac{x^2 + x \sin x}{2018 + \cos x} = \frac{\pi^2 + \pi \sin \pi}{2018 + \cos \pi} = \frac{\pi^2}{2017}.$$

**Ví dụ 2.2.8.** Hàm số  $f(x) = 1 - \sqrt{1 - x^2}$  liên tục trên miền xác định là đoạn  $[-1, 1]$ . Đồ thị của  $f$  được vẽ trong Hình 2.2.3.



Hình 2.2.3

Dưới đây là một giới hạn đặc biệt, đáng lưu ý:

**Mệnh đề 2.2.9.** Ta có

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1. \quad (2.2.1)$$

*Chứng minh.* Trong các tính chất của hàm lượng giác mà ta thừa nhận ở Mục 1.2.1, ta có với  $0 < x < \pi/2$  thì  $\sin x < x < \tan x$ . Suy ra

$$\cos x < \frac{\sin x}{x} < 1.$$

Vì  $\cos$  là hàm liên tục nên khi cho  $x \rightarrow 0$ , dùng Tính chất kẹp, ta được

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sin x}{x} = 1.$$

Với  $x < 0$ , ta có

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\sin x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sin(-x)}{-x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sin x}{x} = 1.$$

Vậy ta được công thức

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1.$$

□

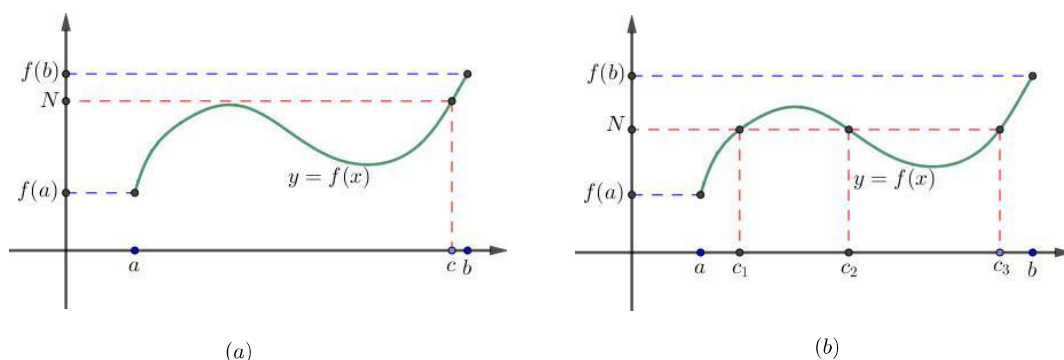
Ta có thể đưa ra một đặc trưng của sự liên tục thông qua dãy như sau.

**Mệnh đề 2.2.10.** Hàm số  $f$  là liên tục tại  $a$  khi và chỉ khi với mọi dãy  $\{x_n\}_{n \geq 1}$  hội tụ về  $a$  thì dãy  $\{f(x_n)\}_{n \geq 1}$  hội tụ về  $f(a)$ , nói cách khác với mọi dãy  $\{x_n\}_{n \geq 1}$  thì

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a \implies \lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = f(a).$$

## 2.2.2 Định lý giá trị trung gian

**Định lý 2.2.11 (Định lý giá trị trung gian).** Giả sử  $f$  liên tục trên khoảng đóng  $[a, b]$  và  $N$  là một số bất kỳ nằm giữa  $f(a)$  và  $f(b)$ . Khi đó tồn tại một số  $c \in [a, b]$  sao cho  $f(c) = N$ .



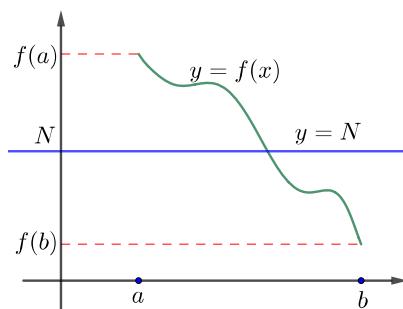
Hình 2.2.4: Minh họa định lý giá trị trung gian.

Một cách ngắn gọn, một hàm số liên tục trên một đoạn lấy mọi giá trị trung gian. Tập giá trị của một hàm liên tục trên một đoạn số thực là một đoạn số thực.

Chú ý rằng giá trị  $N$  có thể được lấy một lần như trong Hình 2.2.4 (a) hay nhiều lần như trong Hình 2.2.4 (b).

Tính chất này là một hệ quả của tính đầy đủ của tập hợp các số thực, xem Mệnh đề 1.1.7. Vì thế ta sẽ không đưa ra chứng minh chi tiết.

Về mặt trực quan, Định lý giá trị trung gian có ý nghĩa rằng **đồ thị của một hàm liên tục trên một khoảng đóng là liên thông**. Điều này thể hiện rằng đồ thị không có lỗ trống hay nét đứt nào, tức là liền mạch. Ta có thể tưởng tượng rằng ta có thể vẽ đoạn đồ thị này bằng một nét bút liền mạch mà không cần nhấc bút khỏi trang giấy. Ta cũng có thể tưởng tượng nếu đồ thị này là một con đường thì ta có thể đi từ đầu này tới đầu kia của một con đường này mà không gặp một trở ngại nào. Đồ thị đó chẳng qua là một đoạn số thực bị uốn cong.

Hình 2.2.5: Minh họa hình học định lý giá trị trung gian: Đường nằm ngang  $y = N$  nằm giữa  $y = f(a)$  và  $y = f(b)$  luôn cắt đồ thị hàm số  $f$  ở ít nhất một điểm.

**Ví dụ 2.2.12.** Chứng tỏ rằng phương trình

$$3x^3 - 2017x^2 + 2018x - 2 = 0$$

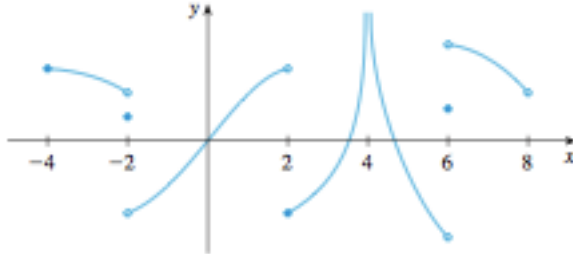
có một nghiệm nằm giữa 0 và 1.

Đặt  $f(x) = 3x^3 - 2017x^2 + 2018x - 2$ . Ta tìm một nghiệm của phương trình đã cho, một số  $c \in (0, 1)$  sao cho  $f(c) = 0$ . Ta có  $f(0) = -2 < 0$  và  $f(1) = 2 > 0$ . Vì  $f$  là một hàm

số liên tục và  $f(0) < 0 < f(1)$  nên Định lý giá trị trung gian cho ta một số  $c \in (0, 1)$  sao cho  $f(c) = 0$ . Nói cách khác, phương trình  $3x^3 - 2017x^2 + 2018x - 2 = 0$  có ít nhất một nghiệm  $c$  trong khoảng  $(0, 1)$ .

## Bài tập

2.2.1. Từ đồ thị hàm số  $g$  cho bên dưới, tìm các khoảng mà hàm số  $g$  liên tục.



2.2.2. Xét tính liên tục của hàm tại điểm  $a$  cho trước.

(a)

$$f(x) = \frac{1}{x + 2017}, \quad a = -2017.$$

(b)

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x+2017} & \text{nếu } x \neq -2017 \\ 2018 & \text{nếu } x = -2017, \end{cases} \quad a = -2.$$

(c)

$$f(x) = \begin{cases} -x^2 + x + 2 & \text{nếu } x < 1 \\ 2 - 1/x & \text{nếu } x \geq 1, \end{cases} \quad a = 1.$$

(d)

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^3 - x}{x^4 - 1} & \text{nếu } x \neq 1 \\ 1/2 & \text{nếu } x = 1, \end{cases} \quad a = 1.$$

(e)

$$f(x) = \begin{cases} \sin(x^2 - x) & \text{nếu } x < 0 \\ 0 & \text{nếu } x = 0 \\ -(x+1)^3 - x^2 + 2 & \text{nếu } x > 0, \end{cases} \quad a = 0.$$

(f)

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 - 3x - 4}{\sqrt{x-2}} & \text{nếu } x \neq 4 \\ 10 & \text{nếu } x = 4, \end{cases} \quad a = 4.$$

2.2.3. Xét sự liên tục của các hàm số sau:

(a)

$$f(x) = \begin{cases} x^3 + 1 & \text{nếu } x < 1 \\ \sqrt{x+3} & \text{nếu } x \geq 1. \end{cases}$$

(b)

$$f(x) = \begin{cases} \sin(x/2 + \cos x) & \text{nếu } x < \pi/2 \\ \cos(x/2 + \sin x - 1) & \text{nếu } x \geq \pi/2. \end{cases}$$

(c)

$$f(x) = |x|.$$

(d)

$$f(x) = \begin{cases} \sin \frac{1}{x}, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0. \end{cases}$$

(e)

$$f(x) = \begin{cases} x \sin \frac{1}{x}, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0. \end{cases}$$

**2.2.4.** Cho

$$f(x) = \begin{cases} 3x + 1 & \text{nếu } x \leq -1 \\ x^3 - 1 & \text{nếu } x > -1. \end{cases}$$

a). Tìm  $\lim_{x \rightarrow -1^-} f(x)$  and  $\lim_{x \rightarrow -1^+} f(x)$ .b). Hàm  $f(x)$  liên tục ở đâu? Không liên tục ở đâu?**2.2.5.** Cho

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 - x - 2}{x + 1} & \text{nếu } x \leq -1 \\ 3 & \text{nếu } x > -1. \end{cases}$$

a) Tìm  $\lim_{x \rightarrow -1^-} f(x)$  và  $\lim_{x \rightarrow -1^+} f(x)$ .b)  $f$  liên tục ở đâu?**2.2.6.** Tính các giới hạn sau:

(a)  $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{5 + \sqrt{x^2 - 1}}{\sqrt{7} + x}$ .

(b)  $\lim_{x \rightarrow \pi} \sin(x + \sin x)$ .

(c)  $\lim_{x \rightarrow \pi/4} e^x \cos^2 x - x^2$ .

(d)  $\lim_{x \rightarrow 2} (x^3 - 4x + 1)^{-7}$ .

**2.2.7.** Giả sử  $f$  và  $g$  là các hàm số liên tục sao cho  $g(1) = 2017$  và  $\lim_{x \rightarrow 1} [f^2(x) - 2f(x)g(x)] = -2017^2$ . Tính  $f(1)$ .**2.2.8.** Tìm giá trị của  $c$  sao cho hàm số sau liên tục trên  $(-\infty, \infty)$  :

$$f(x) = \begin{cases} c^2 x^2 + 2cx & \text{nếu } x < 1 \\ 4x^3 - cx & \text{nếu } x \geq 1. \end{cases}$$

**2.2.9.** Tìm giá trị của  $a, b$  sao cho hàm số sau liên tục trên  $(-\infty, \infty)$  :

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^4 - 1}{x - 1} & \text{nếu } x < 1 \\ ax^2 - bx + 4 & \text{nếu } 1 \leq x < 2 \\ 3x + a - b & \text{nếu } x \geq 2. \end{cases}$$

**2.2.10.** Lúc 15 tuổi, Hương cao gấp đôi cậu em 5 tuổi Huy, nhưng vào sinh nhật thứ 21 của Huy thì Huy đã cao hơn chị 6 cm. Giải thích tại sao có một thời điểm mà cả hai đã cao bằng nhau.**2.2.11.** Sử dụng định lý giá trị trung gian để chỉ ra sự tồn tại một nghiệm của phương trình sau trên một khoảng cho trước.

(a)  $2x^5 + x - 2 = 0, \quad (0, 2)$ .

(b)  $\sqrt[3]{x} = 2017 - x - x^2, \quad (0, 45)$ .

(c)  $\cos x = x, \quad (0, 1)$ .

(d)  $x^3 - 3x - \sin x - 1 = 0, \quad (0, 2)$ .

**2.2.12.** Chứng tỏ phương trình  $x^5 - 4x^3 - 2x^2 + 3x + 1 = 0$  có ít nhất một nghiệm trong khoảng  $[0, 1]$ .**2.2.13.** Cho  $f(x) = x^3 + 2017 \cos x$ , chứng minh rằng tồn tại số  $c$  sao cho  $f(c) = 2000$ .



**2.2.14.** Giả sử  $f$  liên tục trên  $[1, 10]$  và phương trình  $f(x) = 2017$  chỉ có hai nghiệm là  $x = 1$  và  $x = 7$ . Nếu  $f(2) = 2018$ , giải thích vì sao  $f(5) > 2017$ .

**2.2.15.** Chứng minh các phương trình sau luôn có nghiệm thực với  $n$  là số nguyên dương lẻ:

$$\cos(x^n + 1) = x^n + 1, \quad x^n - x^2 + 4x + 1 = 0.$$

**2.2.16.** Nếu  $a$  và  $b$  là các số thực dương, chứng minh phương trình

$$\frac{a}{x^5 + 3x^4 - 2} + \frac{b}{2x^5 + x - 3} = 0$$

có ít nhất một nghiệm trong khoảng  $(-1, 1)$ .

**2.2.17.** Chứng tỏ phương trình

$$\frac{1}{1-x} + \frac{2}{2-x} + \frac{3}{3-x} = 0$$

có ít nhất hai nghiệm trên  $(1, 2) \cup (2, 3)$ .

**2.2.18.** \* Chứng tỏ mọi đa thức bậc lẻ đều có ít nhất một nghiệm.

# Chương 3

## Phép tính vi phân

### 3.1 Đạo hàm và các tính chất

#### 3.1.1 Định nghĩa đạo hàm

Ở Mục 2.1.1 của chương trước, cả hai bài toán tìm hệ số góc của tiếp tuyến và tìm vận tốc tức thời đều đưa về một bài toán chung về tỉ lệ thay đổi: Tìm giới hạn của đại lượng

$$\frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

khi  $x$  tiến về  $a$ . Số thực này cho ta một số đo phản ánh đại lượng  $f(x)$  thay đổi như thế nào khi  $x$  thay đổi.

Để giúp người đọc củng cố, một lần nữa ta nhắc lại minh họa của khái niệm này trong bài toán tìm độ nghiêng và tiếp tuyến của đồ thị hàm  $f$  tại điểm  $x_0$ . Xem Hình 3.1.1. Chúng ta lấy một dãy các số nhỏ  $h_n$  hội tụ về 0 và từ đó có các cát tuyến  $l_n$  đi qua hai điểm khác nhau  $(x_0, f(x_0))$  và  $(x_0 + h_n, f(x_0 + h_n))$  trên đồ thị hàm  $f$ . Các cát tuyến này tiến dần về tiếp tuyến với đồ thị hàm số  $f$  tại  $(x_0, f(x_0))$  nên hệ số góc của chúng cũng tiến dần về hệ số góc của tiếp tuyến. Hệ số góc của  $l_n$  là

$$\frac{f(x_0 + h_n) - f(x_0)}{(x_0 + h_n) - x_0} = \frac{f(x_0 + h_n) - f(x_0)}{h_n}.$$

Vì thế hệ số góc của tiếp tuyến là giới hạn của số này khi  $h_n$  tiến dần về 0.

**Định nghĩa 3.1.1.** *Đạo hàm* của hàm  $f$  tại  $x_0$  được cho bởi số thực

$$f'(x_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

nếu giới hạn tồn tại. Khi giới hạn này tồn tại, chúng ta nói rằng hàm số  $f$  là *có đạo hàm* hay *khả vi* tại  $x_0$  với đạo hàm  $f'(x_0)$ .

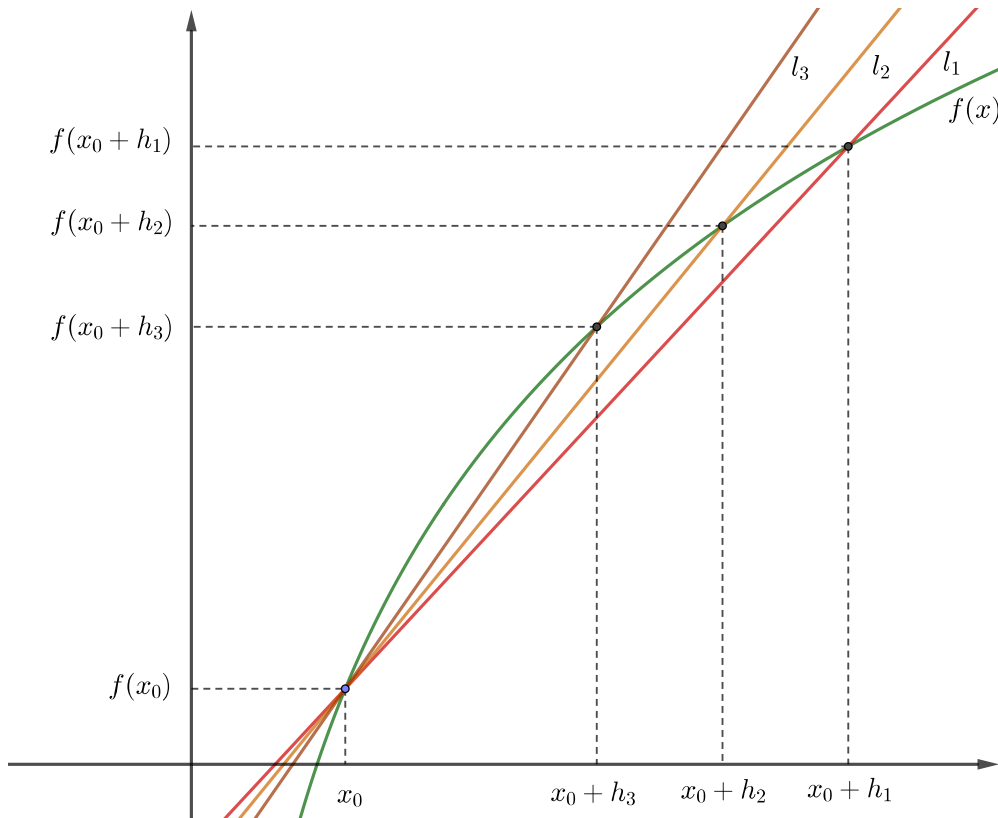
Ta cũng có thể viết với  $h = x - x_0$ :

$$f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}.$$

Một cách viết khác nữa là như sau. Giả sử biến  $x$  thay đổi một lượng  $\Delta x$  từ giá trị  $x_0$ .

<sup>1</sup> Lượng thay đổi tương ứng của giá trị của hàm  $y = f(x)$  là  $\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$ .

<sup>1</sup>Người ta thường sử dụng chữ cái Hy Lạp  $\Delta$  để chỉ lượng thay đổi của một đại lượng.



Hình 3.1.1: Bài toán hệ số góc của tiếp tuyến.

Đạo hàm của của  $f$  tại  $x_0$  là tỉ lệ của thay đổi của  $y$  so với của  $x$  tại  $x_0$ :

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}.$$

Vậy đạo hàm của một hàm tại một điểm đo tỉ lệ, hay tốc độ, giữa thay đổi, hay biến thiên, của giá trị của hàm so với thay đổi của giá trị của biến tại điểm đó. Một cách ngắn gọn: **đạo hàm đo tỉ lệ thay đổi**, hay **đạo hàm đo tốc độ biến thiên**.

Vì đạo hàm đo sự thay đổi nên nó thường được dùng mỗi khi người ta cần khảo sát sự thay đổi ở mức độ chính xác cao. Điều này giải thích phạm vi ứng dụng và tầm quan trọng to lớn của đạo hàm nói riêng và phép tính vi tích phân nói chung.

Với khái niệm chính xác về đạo hàm, giờ ta có thể định nghĩa chính xác các khái niệm tiếp tuyến và vận tốc.

Giả sử hàm  $f$  khả vi tại  $x_0$ , ta định nghĩa **hệ số góc của tiếp tuyến** của đồ thị của hàm số  $f$  tại  $(x_0, f(x_0))$  là số thực  $f'(x_0)$ . Vậy đường thẳng tiếp tuyến của đồ thị của hàm  $f$  tại  $x_0$  có phương trình

$$y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0).$$

Nếu  $f$  là vị trí của vật trên đường thẳng thực tại thời điểm  $t$  khả vi tại  $t$  thì số thực  $f'(t)$ , như trong vật lý, được gọi là **vận tốc** của vật tại thời điểm  $t$ . Nó cho thấy vị trí của vật thay đổi theo thời gian nhanh hay chậm.

**Ví dụ 3.1.2.** Cho  $f$  là một hàm hằng, tức là có số thực  $c$  sao cho  $f(x) = c$  với mọi số thực  $x$ . Tìm đạo hàm của  $f$ .

Theo định nghĩa của đạo hàm, ta có tại  $x_0$  bất kì:

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{c - c}{h} = 0.$$

Vậy  $f'(x_0) = 0$  tại mọi  $x_0 \in \mathbb{R}$ .

**Ví dụ 3.1.3.** Sử dụng công thức định nghĩa đạo hàm để tính đạo hàm của  $f(x) = x^2$  tại điểm  $x = x_0$ .

Đầu tiên ta có

$$f(x_0 + h) - f(x_0) = (x_0 + h)^2 - x_0^2 = h^2 + 2x_0h,$$

nên

$$\frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = \frac{h^2 + 2x_0h}{h} = h + 2x_0.$$

Do đó,

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} (h + 2x_0) = 2x_0.$$

Điều đó có nghĩa là  $f(x) = x^2$  có đạo hàm tại  $x = x_0$  và  $f'(x_0) = 2x_0$  với  $x_0$  tùy ý.

**Ví dụ 3.1.4.** Với số nguyên dương  $k$ , tính đạo hàm của hàm  $f(x) = x^k$  tại  $x = x_0$ .

Chúng ta nhắc lại Công thức nhị thức Newton (1.1.11): với  $k$  là số nguyên dương bất kỳ thì

$$(x + h)^k = \sum_{j=0}^k \frac{k!}{j!(k-j)!} x^{k-j} h^j, \quad (3.1.1)$$

Cũng như ví dụ trên, ta tính

$$\begin{aligned} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} &= \frac{(x_0 + h)^k - x_0^k}{h} \\ &= \frac{\left( \sum_{j=0}^k \frac{k!}{j!(k-j)!} x_0^{k-j} h^j \right) - x_0^k}{h} \\ &= \frac{\sum_{j=1}^k \frac{k!}{j!(k-j)!} x_0^{k-j} h^j}{h} \\ &= \frac{h \sum_{j=1}^k \frac{k!}{j!(k-j)!} x_0^{k-j} h^{j-1}}{h} \\ &= \sum_{j=1}^k \frac{k!}{j!(k-j)!} x_0^{k-j} h^{j-1} \\ &= kx_0^{k-1} + \sum_{j=2}^k \frac{k!}{j!(k-j)!} x_0^{k-j} h^{j-1}. \end{aligned}$$

Do đó,

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \left( kx_0^{k-1} + \sum_{j=2}^k \frac{k!}{j!(k-j)!} x_0^{k-j} h^{j-1} \right) = kx_0^{k-1}.$$

Vậy hàm số  $f(x) = x^k$  có đạo hàm tại  $x_0$  bất kỳ là  $f'(x_0) = kx_0^{k-1}$ .

Người đọc cũng có thể thử làm tính toán này bằng cách thay vì dùng nhị thức Newton thì dùng hằng đẳng thức

$$a^n - b^n = (a - b)(a^{n-1} + a^{n-2}b + \dots + ab^{n-2} + b^{n-1}).$$

**Ví dụ 3.1.5.** Với  $f(x) = \sqrt{x}$ , tìm  $f'(x)$  và miền xác định của  $f'$ .

Ta tính

$$\begin{aligned} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x+h} - \sqrt{x}}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x+h} - \sqrt{x}}{h} \cdot \frac{\sqrt{x+h} + \sqrt{x}}{\sqrt{x+h} + \sqrt{x}} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(x+h) - x}{h(\sqrt{x+h} + \sqrt{x})} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{\sqrt{x+h} + \sqrt{x}} \\ &= \frac{1}{2\sqrt{x}}. \end{aligned}$$

Chúng ta thấy rằng giới hạn trên tồn tại nếu và chỉ nếu  $x > 0$ , vậy  $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$  xác định với mọi  $x > 0$ .

Sau một số ví dụ ta có thể thấy để tìm công thức chung cho đạo hàm thì công thức sau là tiện hơn cả

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

vì ta không cần phải giới thiệu thêm một biến mới  $x_0$ . Ngoài ra công thức này cũng thể hiện rõ vai trò của đạo hàm như là một hàm mới, dẫn xuất từ hàm ban đầu.<sup>2</sup>

## Sự khả vi và sự liên tục

Ta thấy để

$$\frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

có giới hạn khi  $h$  tiến về 0 thì  $f(x+h) - f(x)$  phải tiến về 0, do đó hàm  $f$  phải liên tục tại  $x$ . Thực vậy ta có:

**Định lý 3.1.6 (Khả vi thì liên tục).** Nếu hàm số  $f$  khả vi tại  $x$  thì  $f$  liên tục tại  $x$ .

*Chứng minh.* Tại  $x_0$  mà  $f$  có đạo hàm thì

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow x_0} [f(x) - f(x_0)] &= \lim_{x \rightarrow x_0} \left[ \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} (x - x_0) \right] \\ &= \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \lim_{x \rightarrow x_0} (x - x_0) \\ &= f'(x_0) \cdot 0 = 0. \end{aligned}$$

□

<sup>2</sup>Thuật ngữ đạo hàm trong tiếng Anh là derivative, có nghĩa là dẫn xuất, từ một cái khác mà ra: đạo hàm của một hàm là một hàm dẫn xuất từ hàm ban đầu.

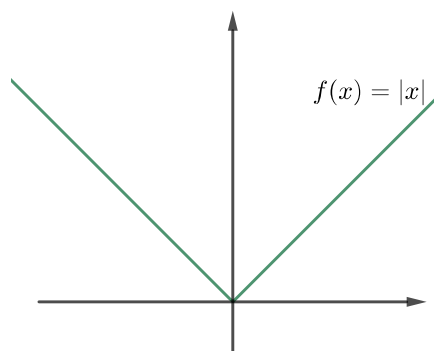
Lưu ý rằng điều ngược lại không đúng: sự liên tục của hàm số không dẫn tới sự khả vi.

Như ta biết sự khả vi tại một điểm nào của hàm số về mặt hình học có nghĩa là đồ thị của hàm số đó có tiếp tuyến tại điểm này. Dạng điệu của đồ thị cần có tính “trơn” nhất định nhờ đó ta thấy được sự tồn tại của tiếp tuyến. Đồ thị của hàm khả vi không được có những “góc nhọn”.

Dưới đây là một ví dụ cho thảo luận trên.

**Ví dụ 3.1.7.** Xét hàm số  $f(x) = |x|$ .

Ta thấy đồ thị của hàm số này không có lỗ hay đứt, nên hàm là liên tục tại mọi nơi. Tuy nhiên đồ thị này có một góc nhọn tại  $(0, 0)$ . Ta nhận thấy tại  $(0, 0)$  tiếp tuyến bên trái khác với tiếp tuyến bên phải, do đó không có một tiếp tuyến nào ở đó.



Hình 3.1.2: Đồ thị của hàm  $f(x) = |x|$  có một “góc nhọn” tại 0.

Chính xác thì

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{|x| - |0|}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{|x|}{x}$$

không tồn tại, như ta đã thấy ở Ví dụ 2.1.23. Hàm trị tuyệt đối không có đạo hàm tại 0 mặc dù liên tục tại đó.

### 3.1.2 Tính chất của đạo hàm

Sau đây là các công thức để làm các tính toán cơ bản trên đạo hàm.

**Định lý 3.1.8.** Cho các hàm số  $f$  và  $g$  có đạo hàm tại  $x$ , khi đó trong các công thức sau hàm bên vế trái có đạo hàm và đạo hàm bằng vế phải:

(a)

$$(f + g)'(x) = f'(x) + g'(x)$$

(b)

$$(f - g)'(x) = f'(x) - g'(x)$$

(c)

$$(\alpha f)'(x) = \alpha f'(x)$$

trong đó  $\alpha$  là một hằng số thực.

(d)

$$(fg)'(x) = f'(x)g(x) + g'(x)f(x)$$

(e)

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(x) = \frac{f'(x)g(x) - g'(x)f(x)}{(g'(x))^2},$$

với điều kiện  $g'(x) \neq 0$ .

*Chứng minh.* (a) Công thức này rất dễ để chứng minh. Ta viết

$$\begin{aligned} \lim_{h \rightarrow \infty} \frac{(f+g)(x+h) - (f+g)(x)}{h} &= \lim_{h \rightarrow \infty} \left( \frac{f(x+h) - f(x)}{h} + \frac{g(x+h) - g(x)}{h} \right) \\ &= f'(x) + g'(x). \end{aligned}$$

Quy tắc cho hiệu và quy tắc cho bội nhân hằng cũng đơn giản tương tự.

(d) Với quy tắc cho tích, ta tính toán như sau:

$$\begin{aligned} &\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h)g(x+h) - f(x)g(x)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h)g(x+h) - f(x+h)g(x) + f(x+h)g(x) - f(x)g(x)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \left[ f(x+h) \frac{g(x+h) - g(x)}{h} + g(x) \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \right] \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} f(x+h) \lim_{h \rightarrow 0} \frac{g(x+h) - g(x)}{h} + \lim_{h \rightarrow 0} g(x) \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \\ &= f(x)g'(x) + g(x)f'(x). \end{aligned}$$

Chú ý rằng ở bước cuối ta đã dùng  $\lim_{h \rightarrow 0} f(x+h) = f(x)$ , tức là dùng tính liên tục của  $f$  tại  $x$ . Ta có tính liên tục này là vì  $f$  được giả sử là khả vi tại  $x$ .

(e) Với quy tắc cho thương, ta tính toán như sau:

$$\begin{aligned} \left(\frac{f}{g}\right)'(x) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{f(x+h)}{g(x+h)} - \frac{f(x)}{g(x)}}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h)g(x) - f(x)g(x+h)}{hg(x+h)g(x)} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h)g(x) - f(x)g(x) + f(x)g(x) - f(x)g(x+h)}{hg(x+h)g(x)} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{g(x) \frac{f(x+h) - f(x)}{h} - f(x) \frac{g(x+h) - g(x)}{h}}{g(x+h)g(x)} \\ &= \frac{g(x) \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} - f(x) \lim_{h \rightarrow 0} \frac{g(x+h) - g(x)}{h}}{\lim_{h \rightarrow 0} g(x+h)g(x)} \\ &= \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{(g(x))^2}. \end{aligned}$$

□

**Ví dụ 3.1.9.** Bây giờ ta có thể tính nhiều đạo hàm.

(a)  $(x^7 + 3x^6 - 4x^2 + 5)' = 7x^6 + 18x^5 - 8x$ .

(b)

$$\begin{aligned} ((x^2 + 3x - 1)(x^4 - 8x))' &= (2x + 3)(x^4 - 8x) + (x^2 + 3x - 1)(4x^3 - 8) \\ &= 6x^5 + 15x^4 - 4x^3 - 24x^2 - 48x + 8. \end{aligned}$$

(c)

$$\begin{aligned} \left(\frac{x^2-1}{x^2+1}\right)' &= \frac{(2x)(x^2+1) - (x^2-1)(2x)}{(x^2+1)^2} \\ &= \frac{4x}{(x^2+1)^2}. \end{aligned}$$

## Bài tập

**3.1.1.** Bằng ý nghĩa hình học của đạo hàm, hãy giải thích vì sao đạo hàm của hàm số hằng bằng 0, và đạo hàm của hàm số tuyến tính  $f(x) = mx + b$  bằng  $m$ .

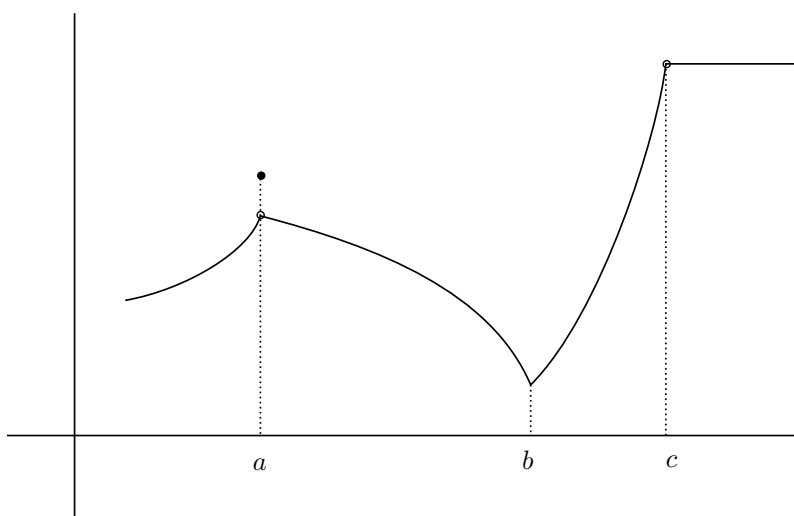
**3.1.2.** Bằng ý nghĩa hình học của đạo hàm, hãy giải thích vì sao đạo hàm của hàm số tuyến tính  $f(x) = mx + b$  bằng  $m$ .

**3.1.3.** Dùng định nghĩa của đạo hàm, tính đạo hàm của hàm số

(a)  $f(x) = x^3$ .

(b)  $f(x) = x^4$ .

**3.1.4.** Từ đồ thị của hàm trong Hình 3.1.3 tìm điểm tại đó hàm không liên tục hoặc không khả vi, và giải thích tại sao.



Hình 3.1.3

**3.1.5.** Từ đồ thị của hàm trong Hình 3.1.4 tìm điểm tại đó hàm không liên tục hoặc không khả vi, và giải thích tại sao.

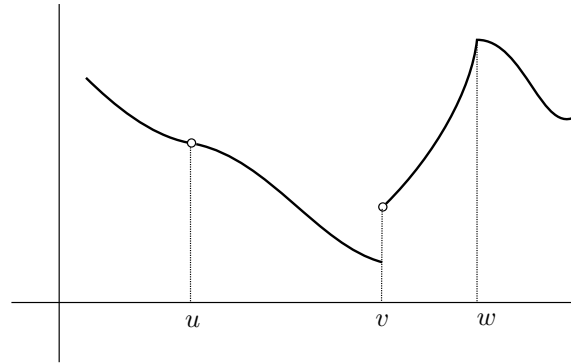
**3.1.6.** Hãy phác họa đồ thị của mỗi hàm số sau đây, và khảo sát tính liên tục hay khả vi của mỗi hàm.

(a)  $y = \begin{cases} x^2, & x \geq 0, \\ -x^2, & x < 0. \end{cases}$

(b)  $y = \begin{cases} x^2 + 1, & x \geq 0, \\ -x^2 - 1, & x < 0. \end{cases}$

(c)  $y = \begin{cases} x^3, & x \leq 1, \\ x, & x > 1. \end{cases}$





Hình 3.1.4

$$(d) y = \begin{cases} x^3, & x < 1 \\ 3x - 2, & x \geq 1. \end{cases}$$

3.1.7. Xét  $f(x) = \sqrt[3]{x}$ . Chứng tỏ rằng  $f'(0)$  không tồn tại.

3.1.8. Xét  $f(x) = \sqrt[3]{x^2}$ . Chứng tỏ rằng  $f'(0)$  không tồn tại.

3.1.9. Chứng tỏ rằng hàm số  $f(x) = |x - 6|$  liên tục tại mọi nơi nhưng không khả vi tại  $x = 6$ . Hãy phác họa đồ thị của hàm số này.

3.1.10. Cho

$$f(x) = \begin{cases} 0 & x \leq 0 \\ \frac{x-2}{x-3} & 0 < x < 3 \\ \frac{x}{2} & x \geq 3. \end{cases}$$

Dùng định nghĩa của đạo hàm, tìm  $f'(x)$  khi  $x > 3$ . Hàm số có khả vi tại  $x = 3$  hay không?

## 3.2 Các công thức cho đạo hàm

### 3.2.1 Đạo hàm của hàm hợp

Giả sử ta muốn tính đạo hàm của hàm  $y = (x^2 + 1)^{100}$ . Ta có thể khai triển hàm này thành dạng một đa thức rồi áp dụng các công thức đạo hàm, nhưng công thức sẽ rất dài dòng vì số mũ quá lớn. Ta có một cách tiếp cận khác dùng khái niệm hàm hợp như sau. Ta đặt  $u = x^2 + 1$ , thì  $y = u^{100}$ . Ta biết cách tính đạo hàm của  $u$  theo  $x$  và đạo hàm của  $y$  theo  $u$ . Liệu ta có tính được đạo hàm của hàm hợp  $y$  theo  $x$ ?

Dùng kí hiệu vi phân của Leibniz, ta có thể đặt vấn đề như sau: Giả sử  $y$  là hàm của  $u$ , và  $u$  là hàm của  $x$ , thì tỉ lệ thay đổi của  $y$  so với  $x$  bằng bao nhiêu? Ta có một lý luận đơn giản như sau. Ta viết:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\Delta y}{\Delta u} \cdot \frac{\Delta u}{\Delta x}.$$

Với giả thiết  $u$  khả vi theo  $x$  thì  $u$  liên tục theo  $x$ , nên  $\Delta u \rightarrow 0$  khi  $\Delta x \rightarrow 0$ . Lấy giới hạn khi  $\Delta x \rightarrow 0$  ta được

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx}.$$

Lý luận này không thực hiện được nếu  $\Delta u = 0$ . Ta sẽ đưa ra một chứng minh đầy đủ dưới đây.

**Định lý 3.2.1 (Quy tắc mắc xích).** Nếu hàm số  $g$  khả vi tại  $x$  và hàm số  $f$  khả vi tại  $g(x)$  thì hàm hợp  $F(x) = f(g(x))$  khả vi tại  $x$  và

$$F'(x) = f'(g(x))g'(x)$$

hay

$$(f \circ g)'(x) = f'(g(x))g'(x).$$

*Chứng minh.* Nếu  $f$  bất kì khả vi tại  $x = a$  thì

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(a + \Delta x) - f(a)}{\Delta x} = f'(a).$$

Đặt

$$\epsilon(\Delta x) = \frac{f(a + \Delta x) - f(a)}{\Delta x} - f'(a),$$

thì  $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \epsilon(\Delta x) = 0$ , và ta viết được

$$\Delta y = f(a + \Delta x) - f(a) = f'(a)\Delta x + \epsilon(\Delta x)\Delta x = [f'(a) + \epsilon(\Delta x)]\Delta x.$$

Đặt  $u = g(x)$  và  $y = f(u)$ , áp dụng điều trên, thì

$$\Delta u = [g'(a) + \epsilon_1(\Delta x)]\Delta x$$

với  $\epsilon_1(\Delta x) \rightarrow 0$  khi  $\Delta x \rightarrow 0$ , và

$$\Delta y = [f'(b) + \epsilon_2(\Delta u)]\Delta u$$

với  $\epsilon_2(\Delta u) \rightarrow 0$  khi  $\Delta u \rightarrow 0$ . Kết hợp ta được

$$\Delta y = [f'(b) + \epsilon_2(\Delta u)][g'(a) + \epsilon_1(\Delta x)]\Delta x.$$

Do đó

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = [f'(b) + \epsilon_2(\Delta u)][g'(a) + \epsilon_1(\Delta x)].$$

Lấy giới hạn

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(b)g'(a) = f'(g(a))g'(a).$$

Đây là công thức đạo hàm của hàm hợp. □

**Ví dụ 3.2.2.** Bây giờ ta quay lại câu hỏi lúc nãy, tính đạo hàm của  $y = (x^2 + 1)^{100}$ . Với  $u = x^2 + 1$ , ta có

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx} = 100u^{99}2x = 100(x^2 + 1)^{99}2x.$$

Viết cách khác, nếu ta đặt  $f(x) = x^{100}$ ,  $g(x) = x^2 + 1$ , thì

$$\begin{aligned} [(x^2 + 1)^{100}]' &= (f \circ g)'(x) = f'(g(x))g'(x) \\ &= f'(x^2 + 1)(x^2 + 1)' = 100(x^2 + 1)^{99}2x. \end{aligned}$$

**Ví dụ 3.2.3.** Ta tính được

$$((x^3 - 4x^2 + 1)^5)' = 5(x^3 - 4x^2 + 1)^4(x^3 - 4x^2 + 1)' = 5(x^3 - 4x^2 + 1)^4(3x^2 - 8x).$$

### 3.2.2 Đạo hàm của hàm ngược

Nếu hàm số  $x = g(y)$  là hàm ngược của hàm số  $y = f(x)$  thì ta có

$$g(f(x)) = x.$$

Nếu cả hai hàm đều khả vi thì lấy đạo hàm hai vế của đẳng thức trên và áp dụng quy tắc đạo hàm của hàm hợp ta được

$$g'(f(x))f'(x) = 1$$

hay

$$g'(y)f'(x) = 1.$$

Vậy ta có một công thức đơn giản:

$$g'(y) = \frac{1}{f'(x)}.$$

Khảo sát trên giả sử sự khả vi của hàm ngược. Không dùng giả sử này ta có thể dùng định lý sau:

**Định lý 3.2.4.** *Giả sử  $f : (a, b) \rightarrow (c, d)$  là một song ánh liên tục và  $f^{-1}$  là hàm số ngược của  $f$ . Nếu  $f$  có đạo hàm tại  $x \in (a, b)$  và  $f'(x) \neq 0$ , thì  $f^{-1}$  có đạo hàm tại  $y = f(x)$ , và*

$$(f^{-1})'(y) = \frac{1}{f'(x)}.$$

*Chứng minh.* Theo định nghĩa thì

$$(f^{-1})'(y) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f^{-1}(y+h) - f^{-1}(y)}{h}.$$

Đặt  $x = f^{-1}(y)$  và  $x+k = f^{-1}(y+h)$  thì  $h = f(x+k) - f(x)$  và  $k = f^{-1}(y+h) - f^{-1}(y)$ . Ta sử dụng một tính chất là nếu một song ánh trên một khoảng là liên tục thì ánh xạ ngược cũng liên tục (chứng minh tính chất này khó hơn mức của môn học này một chút, người đọc có thể xem chẳng hạn ở [Spi94, tr. 247]). Vì  $f^{-1}$  là liên tục nên khi  $h \rightarrow 0$  thì  $k \rightarrow 0$ . Ta có thể viết

$$\begin{aligned} (f^{-1})'(y) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f^{-1}(y+h) - f^{-1}(y)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{k}{f(x+k) - f(x)} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{\frac{f(x+k) - f(x)}{k}} = \lim_{k \rightarrow 0} \frac{1}{\frac{f(x+k) - f(x)}{k}} = \frac{1}{f'(x)}. \end{aligned}$$

□

### 3.2.3 Đạo hàm của hàm sơ cấp

#### Đạo hàm của hàm lượng giác

**Ví dụ 3.2.5.** Ta tính đạo hàm của hàm sin. Ta có

$$\begin{aligned} \sin'(x) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin(x+h) - \sin x}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin x \cos h + \sin h \cos x - \sin x}{h} \\ &= \sin x \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\cos h - 1}{h} + \cos x \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin h}{h}. \end{aligned}$$

Ta đã biết giới hạn đặc biệt (2.2.1):

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin h}{h} = 1.$$

Bên cạnh đó

$$\begin{aligned} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\cos h - 1}{h} &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{-\sin^2(\frac{h}{2})}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{-\sin^2(\frac{h}{2})}{(\frac{h}{2})^2} \cdot \frac{h}{4} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} -\left(\frac{\sin(\frac{h}{2})}{\frac{h}{2}}\right)^2 \cdot \frac{h}{4} = 1 \cdot 0 = 0. \end{aligned}$$

Vậy

$$\sin' x = \cos x.$$

**Ví dụ 3.2.6.** Ta tính đạo hàm của hàm  $\cos$ . Vì  $\cos x = \sin(\frac{\pi}{2} - x)$  nên theo đạo hàm của hàm hợp:

$$\cos' x = \sin'(\frac{\pi}{2} - x)(\frac{\pi}{2} - x)' = -\cos(\frac{\pi}{2} - x) = -\sin x.$$

Vậy

$$\cos' x = -\sin x.$$

**Ví dụ 3.2.7.** Ta tính đạo hàm của hàm  $\tan$ . Vì  $\tan = \frac{\sin}{\cos}$  nên dùng công thức đạo hàm của thương ta được:

$$\tan' x = \frac{\sin' x \cos x - \sin x \cos' x}{\cos^2 x} = \frac{\cos x \cos x - \sin x(-\sin x)}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x}.$$

Vậy

$$\tan' x = \frac{1}{\cos^2 x}.$$

**Ví dụ 3.2.8.** Xét hàm số  $x = g(y) = \arcsin y$  với  $-1 < y < 1$ , là hàm số ngược của hàm số  $y = f(x) = \sin x$ ,  $-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$ . Theo công thức đạo hàm của hàm số ngược ta có

$$g'(y) = \frac{1}{f'(x)} = \frac{1}{\cos x} = \frac{1}{\sqrt{1 - \sin^2 x}} = \frac{1}{\sqrt{1 - y^2}}.$$

Vậy

$$\arcsin' x = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}, x \in (-1, 1).$$

Tương tự ta cũng tính được

$$\arccos' x = -\frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}, x \in (-1, 1).$$

$$\arctan' x = \frac{1}{1 + x^2}, x \in \mathbb{R}.$$

## Đạo hàm của hàm mũ và hàm log

Trong các tài liệu nâng cao hơn như [TPPT02, tr. 83], người ta có thể chứng minh được

$$(e^x)' = e^x.$$

Công thức đơn giản này là lí do chính mà cơ số  $e$  được dùng phổ biến hơn các cơ số khác.

Từ công thức trên ta tính được ngay đạo hàm của hàm mũ với cơ số  $a$  bất kì:

$$(a^x)' = (e^{\ln a^x})' = (e^{x \ln a})' = e^{x \ln a} (x \ln a)' = e^{x \ln a} \ln a = a^x \ln a.$$

Vậy

$$(a^x)' = a^x \ln a.$$

**Ví dụ 3.2.9.** Xét hàm số  $x = g(y) = \log_a y$ , với  $a > 0$  và  $a \neq 1$ . Đây là hàm số ngược của hàm số  $y = f(x) = a^x$ . Theo công thức đạo hàm của hàm số ngược ta có

$$g'(y) = \frac{1}{f'(x)} = \frac{1}{a^x \ln a} = \frac{1}{y \ln a}.$$

Vậy

$$(\log_a x)' = \frac{1}{x \ln a}.$$

Đặc biệt

$$(\ln x)' = \frac{1}{x}.$$

## Đạo hàm của hàm lũy thừa

Xét hàm  $y = x^r$  trong đó  $r$  là một số thực bất kì và  $x > 0$ . Ta viết được, dùng đạo hàm của hàm hợp:

$$(x^r)' = (e^{\ln x^r})' = (e^{r \ln x})' = e^{r \ln x} (r \ln x)' = x^r \frac{r}{x} = r x^{r-1}.$$

Vậy đây là công thức chung cho đạo hàm của hàm lũy thừa bất kì:

$$(x^r)' = r x^{r-1}, x > 0.$$

**Ví dụ 3.2.10.** Với  $x > 0$  thì

$$(\sqrt{x})' = (x^{\frac{1}{2}})' = \frac{1}{2} x^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2\sqrt{x}}.$$

**Ví dụ 3.2.11.** Chú ý là trong trường hợp cụ thể công thức đạo hàm của hàm lũy thừa có thể đúng trên tập lớn hơn. Chẳng hạn với  $x < 0$  thì

$$(\sqrt[3]{x})' = -(\sqrt[3]{-x})' = -((-x)^{1/3})' = -\frac{1}{3}(-x)^{-2/3}(-x)' = \frac{1}{3(\sqrt[3]{x})^2}.$$

Vậy

$$(\sqrt[3]{x})' = \frac{1}{3(\sqrt[3]{x})^2}, x \neq 0.$$

### 3.2.4 Đạo hàm của hàm ẩn

Với một hàm số  $y = f(x)$  thì giá trị của  $y$  phụ thuộc theo giá trị  $x$  và sự phụ thuộc này được biểu diễn một cách rõ ràng theo quy luật được cho bởi  $f$ , ta nói  $y$  là một hàm hiện (hay tường minh) của  $x$ . Tuy nhiên có rất nhiều sự phụ thuộc của  $y$  vào  $x$  mà ở đó chúng ta không có sẵn một công thức cụ thể  $f$  để biểu diễn sự phụ thuộc này, khi đó người ta thường nói  $y$  là hàm ẩn của  $x$ . Dưới những điều kiện nhất định ta vẫn có thể tính được đạo hàm của hàm ẩn. Điều này được minh họa trong ví dụ sau.

**Ví dụ 3.2.12.** Cho  $y$  phụ thuộc vào  $x$  theo phương trình

$$x^3 + y^3 = 6y.$$

Nếu muốn tính công thức hiện  $y$  theo  $x$  ta sẽ giải một phương trình bậc 3, một việc không dễ. Với giả thiết là  $y$  khả vi theo  $x$  (giả thiết này là đúng dưới những điều kiện dễ thỏa và dễ giải thích, được trình bày trong môn vi tích phân hàm nhiều biến, xem [Bmgt2]), lấy đạo hàm của cả hai vế phương trình theo  $x$ , thì ta được

$$3x^2 + 3y^2y'(x) = 6y'(x).$$

Từ đó

$$(3y^2 - 6)y'(x) = -3x^2.$$

Ta vẫn chưa tính được đạo hàm  $y'(x)$  một cách tường minh theo  $x$ , tuy nhiên tại mỗi điểm  $(x, y)$  cụ thể cho trước ta có thể tìm được giá trị của  $y'(x)$ . Chẳng hạn tại điểm  $(\sqrt[3]{5}, 1)$  thỏa phương trình  $x^3 + y^3 = 6y$  ta có

$$(3 \cdot 1 - 6)y'(\sqrt[3]{5}) = -3\sqrt[3]{25}$$

nên

$$y'(\sqrt[3]{5}) = \sqrt[3]{25}.$$

### 3.2.5 Đạo hàm bậc cao

Nếu  $f$  có đạo hàm  $f'$  trong một khoảng nào đó thì  $f'$  cũng là một hàm. Nếu  $f'$  có đạo hàm thì đạo hàm này được gọi là đạo hàm cấp hai của  $f$ . Ta ký hiệu  $f'' = (f')'$ .

**Ví dụ 3.2.13.** Đạo hàm cấp một của hàm số  $f(x) = x^3 + 3x^2 + 3x + 1$  là  $f'(x) = 3x^2 + 6x + 3$ . Đạo hàm cấp một của  $f'$  là  $f''(x) = (f')'(x) = (3x^2 + 6x + 3)' = 6x + 6$ .

Đạo hàm cấp hai cho tốc độ biến thiên của đạo hàm cấp một.

**Ví dụ 3.2.14.** Xét hàm vị trí của vật trong không gian theo thời gian, thì đạo hàm bậc một là vận tốc chuyển động của vật, còn đạo hàm bậc hai là vận tốc thay đổi của vận tốc của vật, tức là gia tốc. Nếu gia tốc dương thì vận tốc của vật đang tăng, tức là vật đang tăng tốc. Ngược lại gia tốc âm thì vận tốc của vật đang giảm, vật đang giảm tốc.

Giả sử đạo hàm cấp  $(n-1)$  được xác định, ký hiệu  $f^{(n-1)}$ , ta định nghĩa đạo hàm cấp  $n$  của  $f$ , ký hiệu là  $f^{(n)}$ , là đạo hàm của đạo hàm cấp  $(n-1)$ , tức là  $f^{(n)} = [f^{(n-1)}]'$ .

**Ví dụ 3.2.15.** Tính đạo hàm đến cấp  $n$  của hàm  $f(x) = \sin x$ .

Ta có  $f'(x) = \cos x$ ,  $f''(x) = -\sin x$ ,  $f^{(3)}(x) = -\cos x$ ,  $f^{(4)}(x) = \sin x$ ,  $f^{(5)}(x) = \cos x$ . Ta nhận thấy các đạo hàm này lặp lại xoay vòng sau 4 lần lấy đạo hàm. Kết luận này có thể được trình bày chặt chẽ bằng cách dùng phép qui nạp toán học.

**Ví dụ 3.2.16.** Không phải hàm nào cũng có đạo hàm cấp hai, cũng như không phải hàm nào cũng có đạo hàm cấp một. Xét hàm số sau

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^2}{2}, & x \geq 0, \\ -\frac{x^2}{2}, & x < 0. \end{cases}$$

Cả hai nhánh của hàm này đều bằng không tại điểm rẽ  $x = 0$  nên  $f$  là hàm liên tục. Hơn nữa, ta còn tính được

$$f'(x) = \begin{cases} x, & x \geq 0, \\ -x, & x < 0. \end{cases}$$

Ta thấy  $f'(x) = |x|$ . Như đã tìm hiểu ở phần trên, hàm  $|x|$  không có đạo hàm tại  $x = 0$ . Điều đó có nghĩa là  $f''(0)$  không tồn tại.

## Bài tập

**3.2.1.** Tìm đạo hàm của các hàm số sau:

- |  |  |
|--|--|
| (a) $-7x^3$                                  | (m) $(x^4 + 3x^2 - 2)^5$                     |
| (b) $12x^{-2}$                               | (n) $\sqrt[3]{x^3 + \sin x}$                 |
| (c) $3x^{-3/2}$                              | (o) $\cos(a^2 + x^2)$                        |
| (d) $\frac{1}{2}\sqrt{x}$                    | (p) $a^3 + \cos^3 x$                         |
| (e) $3x^2 - 9x + 7x^{2/5} - 3x^{1/2}$        | (q) $(x^2 + 1)^3(\sin x)^2$                  |
| (f) $4x^5 - 3x^{1/2}$                        | (r) $\sin \sqrt{x^2 + 1}$                    |
| (g) $(x^2 + 1)(x^2 + 3x + 2)$                | (s) $x \sin \frac{1}{x}$                     |
| (h) $(x^{1/2} + x^{-1/2})(4x^5 - 3\sqrt{x})$ | (t) $\cos^4(\sin^3 x)$                       |
| (i) $\frac{1}{x^2 + \sqrt{x}}$               | (u) $\cos \sqrt{\sin(\tan \pi x)}$           |
| (j) $\sqrt{x} \sin x$                        | (v) $y = \sin(\sin x)$ , tại $(\pi, 0)$      |
| (k) $\frac{x}{1 + \tan x}$                   | (w) $y = \sin x + \sin^2 x$ , tại $(0, 0)$   |
| (l) $\frac{\cos x}{1 - \sin x}$              | (x) $\sqrt[2018]{\ln(2017 + x^2)} e^{2014x}$ |
|  | (y) $e^{e^x}$                                |

**3.2.2.** Hãy tìm phương trình của tiếp tuyến với đồ thị của mỗi hàm số sau tại giá trị  $x$  cho trước.

- (a)  $f(x) = x^2$ ,  $x = 3$   
 (b)  $f(x) = \frac{x}{x^2+2}$ ,  $x = 1$ .

**3.2.3.** Cho hàm  $g$  khả vi,  $g'(1) = g(1) = 1$ . Cho  $f = 2g \cdot (g \circ g^2)$ . Tìm  $f'(1)$ .

**3.2.4.** Cho  $F(x) = f(x(f(xf(x))))$ , với  $f(1) = 2$ ,  $f(2) = 3$ ,  $f'(1) = 4$ ,  $f'(2) = 5$ ,  $f'(3) = 6$ . Tìm  $F'(1)$ .

**3.2.5.** Cho hai hàm số  $g(x) = \sqrt[3]{x+5}$  và  $h(x) = 3^{-x+1}$ . Tính đạo hàm của  $g$ ,  $h$ , và  $g \circ h$ .

**3.2.6.** Cho

$$g(x) = \frac{x^{11}}{x^{10} + 2}$$

và cho  $h$  là hàm ngược của  $g$ . Tính  $h'(1/3)$ .

**3.2.7.** Cho  $u(x) = \sqrt{x^3 + x^2 + x + 1}$  và cho  $v$  là hàm ngược của  $u$ . Tính  $v'(1)$ .

**3.2.8.** Viết phương trình tiếp tuyến của đồ thị của hàm số  $y$  được cho bởi phương trình ẩn:

- (a)  $x^3 + y^3 = 6xy$  tại điểm  $(3, 3)$
- (b)  $x^2 + y^2 = 25$  tại điểm  $(3, -4)$
- (c)  $x^2 + y^2 = 2$  tại điểm  $(1, 1)$
- (d)  $x^2 + y^2 = 1 + y \tan x$  tại điểm  $(0, 1)$
- (e)  $y \sin 2x = x \cos 2y$  tại điểm  $(\pi/2, \pi/4)$
- (f)  $\sin(x + y) = 2x - 2y$  tại điểm  $(\pi, \pi)$
- (g)  $x^2 + y^2 = (2x^2 + 2y^2 - x)^2$  (đường hình trái tim) tại điểm  $(0, 1/2)$
- (h)  $x^2(x^2 + y^2) = y^2$  tại  $(1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2})$

**3.2.9.** Một cái thang dài 50 mét đang dựa vào tường. Khi đỉnh thang đang ở cách nền 30 mét thì thang bị trượt, đỉnh thang tuột xuống với vận tốc 3 mét mỗi giây. Hỏi đáy thang trượt xa khỏi bức tường với vận tốc bao nhiêu?

**3.2.10.** Hãy tính đạo hàm cấp 3 của hàm số  $\frac{\sin x}{1 + x^2}$ .

**3.2.11.** Hãy tính đạo hàm cấp 3 của hàm số  $\frac{\cos x}{e^x}$ .

**3.2.12.** Hãy tìm đạo hàm cấp  $n$  của mỗi hàm sau:

- (a)  $f(x) = x^{10} + 2x^9 + 1$
- (b)  $f(x) = \frac{1}{x+1}$
- (c)  $f(x) = \frac{1}{x-2}$
- (d)  $f(x) = \ln x$
- (e)  $f(x) = \sin x$
- (f)  $f(x) = \sin xe^x$
- (g)  $f(x) = \ln xe^x$
- (h)  $f(x) = (x^5 + 1)(x^6 + 2x)(x^7 + \sin x)$
- (i)  $f(x) = \frac{1}{x^2-4}$
- (j)  $f(x) = \frac{1}{x^2-9}$ .

**3.2.13 (Công thức Leibniz cho đạo hàm của tích).** Bằng phương pháp quy nạp toán học hãy chứng minh công thức hữu ích sau trong tính toán đạo hàm cấp cao. Nếu  $f$  và  $g$  có đạo hàm đến cấp  $n$  thì hàm số tích  $f \cdot g$  có đạo hàm đến cấp  $n$  và

$$(f \cdot g)^{(n)} = \sum_{k=0}^n C_n^k f^{(k)} \cdot g^{(n-k)}.$$

Ở đây  $C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}$ .

**3.2.14.** Sử dụng công thức Leibniz cho đạo hàm của tích, tính đạo hàm cấp 100 của hàm  $f(x) = x^3 \sin x$  tại  $x = 0$ .



# Chương 4

## Ứng dụng của đạo hàm

### 4.1 Cực trị của hàm số

Một trong những ứng dụng quan trọng nhất của phép tính vi phân là các bài toán tối ưu hoá, trong đó chúng ta cần phải tìm cách thức tối ưu (tốt nhất) để làm một việc gì đó. Việc này có thể đưa về bài toán tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của một hàm số.

**Định nghĩa 4.1.1.** Cho hàm  $f$  xác định trên miền  $D$ . Tại  $c \in D$  nếu  $f(c) \geq f(x)$  với mọi  $x$  thuộc  $D$  thì ta nói  $f$  có **cực đại toàn cục**, hay **cực đại tuyệt đối**, hay **giá trị lớn nhất** là  $f(c)$  xảy ra tại  $c$ . Tương tự,  $f$  có **cực tiểu toàn cục**, hay **cực tiểu tuyệt đối**, hay **giá trị nhỏ nhất** là  $f(c)$  xảy ra tại  $c \in D$  nếu  $f(c) \leq f(x)$  với mọi  $x$  thuộc  $D$ .

Nếu  $f(c) \geq f(x)$  với mọi  $x$  thuộc một khoảng mở  $(a, b)$  chứa  $c$  thì ta nói  $f$  có **cực đại địa phương**, hay **cực đại tương đối** tại  $c$ . Nếu  $f(c) \leq f(x)$  với mọi  $x$  thuộc một khoảng mở  $(a, b)$  chứa  $c$  thì ta nói  $f$  có **cực tiểu địa phương**, hay **cực tiểu tương đối** tại  $c$ .

Cực đại và cực tiểu của được gọi chung là **cực trị**. Điểm tại đó xảy ra cực trị thường được gọi là **điểm cực trị**.

Một cách trực quan, trên một đồ thị thì cực đại toàn cục xảy ra tại điểm cao hơn hay bằng mọi điểm khác trên đồ thị, trong khi cực đại địa phương xảy ra tại điểm cao hơn hay bằng mọi điểm khác trong một lân cận nào đó, xem Hình 4.1.1.

Với định nghĩa trên thì một giá trị có thể là cực trị toàn cục nhưng không phải là cực trị địa phương, khi nó xảy ra ở điểm biên của miền xác định.

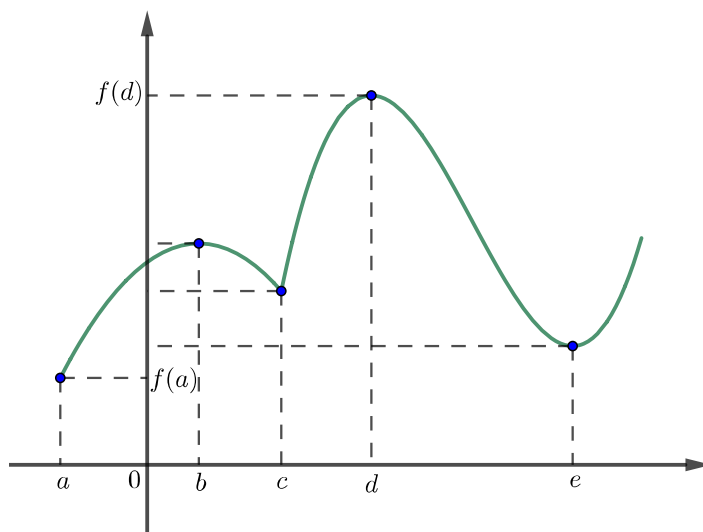
**Ví dụ 4.1.2.** Xét  $f(x) = x^2$  trên miền xác định  $\mathbb{R}$ , xem Hình 4.1.2. Vì  $f(x) \geq f(0)$  với mọi  $x$  nên  $f(0) = 0$  là cực tiểu toàn cục và là cực tiểu địa phương của  $f$ . Tuy nhiên không có điểm cao nhất trên parabol và do đó hàm số này không có giá trị cực đại.

Nếu chỉ xét miền xác định là  $[-1, 2]$  thì  $f$  có một cực tiểu địa phương ở  $x = 0$ , một cực tiểu toàn cục ở  $x = 0$ , một cực đại toàn cục ở  $x = 2$ , và không có cực đại địa phương.

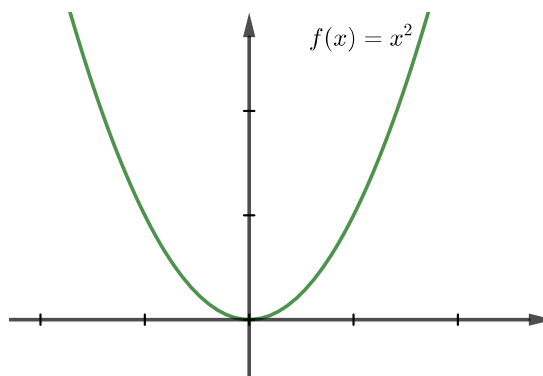
**Ví dụ 4.1.3.** Hàm số  $f(x) = x^3$  không có cực trị, xem Hình 4.1.3.

Trong các hình vẽ ta thấy nếu tại điểm cực trị đồ thị của hàm có tiếp tuyến thì tiếp tuyến sẽ nằm ngang. Điều này không đáng ngạc nhiên với lí luận sau: gần điểm cực trị, nếu trước đó hàm đã tăng thì qua điểm cực trị không thể tiếp tục tăng, còn nếu trước đó đã giảm thì qua điểm cực trị không thể tiếp tục giảm, do đó đạo hàm phải đổi dấu khi đi qua  $c$ , do đó phải bằng 0 tại  $c$ . Lí luận đơn giản này giả thiết tính liên tục của đạo hàm, tuy nhiên kết quả đúng mà không cần giả thiết này:

**Định lý 4.1.4 (Định lý Fermat).** Nếu  $f$  có cực trị địa phương tại  $c$  và  $f'(c)$  tồn tại thì  $f'(c) = 0$ .



Hình 4.1.1: Cực tiểu tuyệt đối  $f(a)$ , cực đại tuyệt đối  $f(d)$ , cực tiểu địa phương  $f(c)$  và  $f(e)$ , cực đại địa phương  $f(b)$  và  $f(d)$ .



Hình 4.1.2: Giá trị cực tiểu 0, không có cực đại.

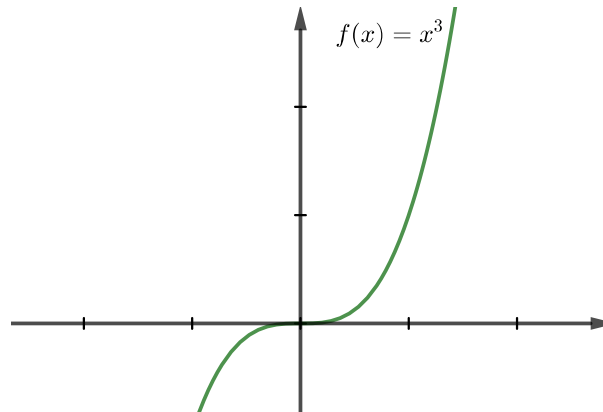
Như vậy **tại cực trị địa phương đạo hàm phải bằng 0**. Đây là một quan sát then chốt trong ứng dụng của đạo hàm.

*Chứng minh.* Giả sử rằng  $f$  có cực đại địa phương tại  $c$ . Ta có nếu như  $h$  đủ gần 0 ( $h$  có thể âm hoặc dương) thì

$$f(c) \geq f(c+h).$$

Vậy nếu  $h$  đủ nhỏ và  $h > 0$  thì

$$\frac{f(c+h) - f(c)}{h} \leq 0.$$



Hình 4.1.3: Không có cực tiểu, không có cực đại.

Lấy giới hạn phải của cả hai vế của bất đẳng thức ta có

$$f'(c) = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{f(c+h) - f(c)}{h} \leq 0.$$

Tương tự nếu  $h$  đủ nhỏ và  $h < 0$  thì

$$\frac{f(c+h) - f(c)}{h} \geq 0.$$

Lấy giới hạn trái hai vế của bất đẳng thức ta được

$$f'(c) = \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{f(c+h) - f(c)}{h} \geq 0.$$

Như thế ta buộc phải có  $f'(c) = 0$ .

Chứng minh tương tự cho trường hợp  $f$  có cực tiểu địa phương là tương tự.  $\square$

Điểm tại đó đạo hàm bằng 0 còn được gọi là một **điểm dừng** của hàm (vì nếu coi đạo hàm là vận tốc của chuyển động thì dừng chuyển động có nghĩa là vận tốc bằng 0). Điểm tại đó đạo hàm bằng 0 hoặc không tồn tại được gọi là một **điểm tới hạn** của hàm.

**Ví dụ 4.1.5.** Hàm số  $f(x) = |x|$  có điểm tới hạn  $x = 0$  vì  $f'(0)$  không tồn tại.

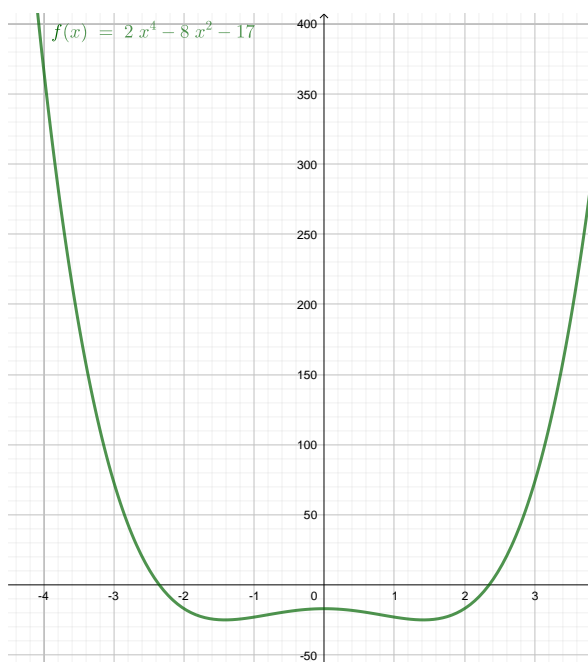
Định lý Fermat có thể được viết lại là **cực trị địa phương chỉ xảy ra tại điểm tới hạn**.

**Ví dụ 4.1.6.** Giả sử ta biết hoặc dự đoán hàm  $f(x) = 2x^4 - 8x^2 - 17$  có giá trị nhỏ nhất. Ta tìm giá trị đó.

Điểm  $x$  mà ở đó hàm  $f$  đạt cực tiểu toàn cục cũng là điểm tại đó hàm đạt cực tiểu địa phương, do miền xác định của hàm  $f$  là một khoảng mở  $(-\infty, \infty)$ . Theo Định lý Fermat, điểm này phải là một điểm dừng, tức là  $f'(x) = 0$ . Giải phương trình ta được

$$f'(x) = 0 \iff 8x^3 - 16x = 0 \iff 4x(x^2 - 2) = 0 \iff x = 0 \vee x = \sqrt{2} \vee x = -\sqrt{2}.$$

Tính giá trị  $f(0) = -17$ ,  $f(\sqrt{2}) = f(-\sqrt{2}) = -25$  ta kết luận giá trị nhỏ nhất của hàm  $f$ , nếu có, là  $-25$ .



### 4.1.1 Sự tồn tại giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất

Dưới đây là một điều kiện đủ quan trọng cho sự tồn tại cực trị toàn cục.

**Định lý 4.1.7 (Định lý cực trị toàn cục).** Nếu  $f$  liên tục trên một khoảng đóng  $[a, b]$  thì  $f$  đạt giá trị cực đại toàn cục  $f(c)$  và giá trị cực tiểu toàn cục  $f(d)$  tại các số  $c$  và  $d$  nào đó trong  $[a, b]$ .

Nói ngắn gọn: *Một hàm liên tục trên một đoạn đóng thì có giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất.*

Định lý này là hệ quả của tính đầy đủ của đường thẳng thực. Chứng minh thường có trong các giáo trình nâng cao hơn như [Kha96, tr. 56].

Từ định lý này ta đưa ra thuật toán sau:

*Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của một hàm trên một khoảng đóng  $[a, b]$ :*

**Bước 1:** Tìm các điểm tới hạn bên trong khoảng mở  $(a, b)$ .

**Bước 2:** Tính các giá trị của hàm tại các điểm tới hạn tìm được ở Bước 1 và tại các điểm mút  $a$  và  $b$ .

**Bước 3:** Số lớn nhất trong các số tìm được ở Bước 2 là giá trị lớn nhất của hàm, số nhỏ nhất là giá trị nhỏ nhất của hàm.

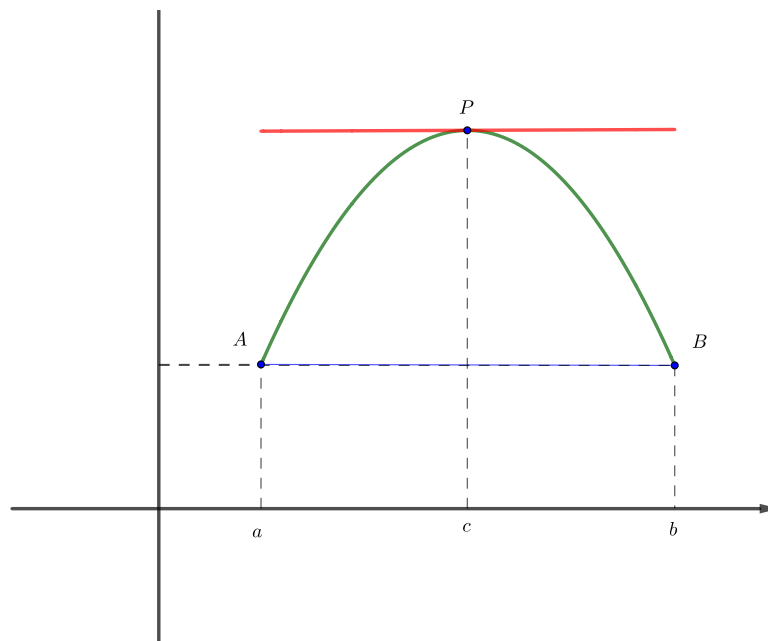
**Ví dụ 4.1.8.** Tiếp tục Ví dụ 4.1.6, ta tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm  $f(x) = 2x^4 - 8x^2 - 17$  trên đoạn  $[-1, 3]$ .

Trong khoảng mở  $(-1, 3)$  hàm  $f$  có hai điểm tới hạn là  $0$  và  $\sqrt{2}$ . Ta tính được  $f(0) = -17$ ,  $f(\sqrt{2}) = -25$ ,  $f(-1) = -23$ ,  $f(3) = 73$ . Vậy giá trị nhỏ nhất là  $-25$  và giá trị lớn nhất là  $73$ .

### 4.1.2 Các định lý giá trị trung bình

**Định lý 4.1.9 (Định lý Rolle).** Nếu hàm  $f$  liên tục trên đoạn  $[a, b]$ , khả vi trong khoảng  $(a, b)$ , và  $f(a) = f(b)$ , thì tồn tại một số thực  $c$  thuộc  $(a, b)$  sao cho  $f'(c) = 0$ .

Định lý Rolle khẳng định một điều dễ thấy trực quan: Nếu một đường cong đồ thị liên tục nối hai điểm có cùng cao độ thì sẽ có một điểm trên đồ thị tại đó tiếp tuyến nằm ngang.



Hình 4.1.4: Minh họa Định lý Rolle.

Giải thích nguồn gốc của Định lý Rolle cũng đơn giản: hàm liên tục trên một đoạn thì có giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất, nếu giá trị của hàm tại hai đầu của đoạn xác định bằng nhau thì một trong hai giá trị cực trị toàn cục trên phải xảy ra bên trong, do đó là cực trị địa phương, xảy ra tại một điểm dừng.

*Chứng minh.* Ta xét ba trường hợp.

- Trường hợp  $f$  là một hàm hằng,  $f = f(a)$ : Khi đó với mọi  $x \in (a, b)$  thì  $f'(x) = 0$ , do đó ta có thể chọn  $c$  bất kỳ trong khoảng  $(a, b)$ .
- Trường hợp  $f(x) > f(a)$  với một  $x$  nào đó trong khoảng  $(a, b)$ : Theo Định lý cực trị toàn cục 4.1.7,  $f$  có một giá trị cực đại toàn cục tại một điểm nào đó trong đoạn  $[a, b]$ . Vì  $f(a) = f(b)$  nên giá trị cực đại toàn cục này phải đạt tại một số  $c$  trong khoảng mở  $(a, b)$ . Khi đó  $f$  có cực đại địa phương tại  $c$ . Suy ra  $f'(c) = 0$  theo Định lý Fermat.
- Trường hợp  $f(x) < f(a)$  với một  $x$  nào đó trong khoảng  $(a, b)$ : Tương tự, theo Định lý cực trị toàn cục 4.1.7,  $f$  có một giá trị cực tiểu toàn cục trong đoạn  $[a, b]$  và vì  $f(a) = f(b)$  giá trị cực tiểu toàn cục này đạt tại một số  $c$  trong khoảng  $(a, b)$ , do đó  $f$  có cực tiểu địa phương tại  $c$  và như vậy  $f'(c) = 0$  theo Định lý Fermat.

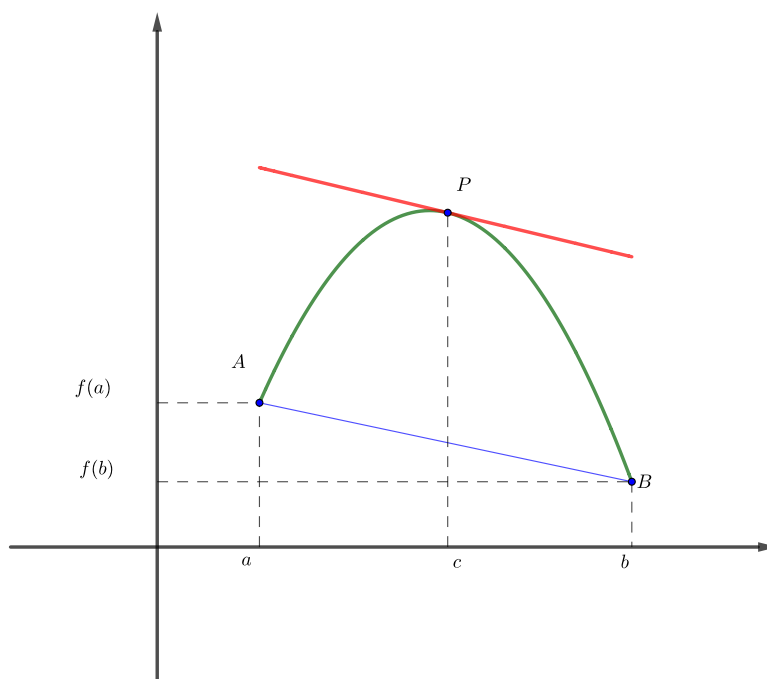
□

**Định lý 4.1.10 (Định lý giá trị trung bình – Định lý Lagrange).** Nếu hàm  $f$  liên tục trên đoạn  $[a, b]$  và khả vi trong khoảng  $(a, b)$  thì có  $c$  thuộc  $(a, b)$  sao cho

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

Đây là một dạng thường dùng của các định lý giá trị trung bình.

Ý nghĩa hình học của định lý này là như sau: Ở Hình 4.1.5, hệ số góc của đường cát tuyến  $AB$  là  $\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$  và  $f'(c)$  là hệ số góc của tiếp tuyến tại điểm  $(c, f(c))$ , Định lý Lagrange nói rằng có ít nhất một điểm  $P(c, f(c))$  trên đồ thị mà tiếp tuyến tại đó song song với đường cát tuyến  $AB$ . Một cách trực quan, Định lý Lagrange cho một “phiên bản nghiên” của Định lý Rolle.



Hình 4.1.5: Minh họa Định lý Lagrange.

*Chứng minh.* Áp dụng Định lý Rolle cho hàm

$$g(x) = f(x) - \left[ f(a) + \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a) \right].$$

Hàm  $g$  này chẳng qua là hiệu giữa hàm  $f$  với hàm tuyến tính có đồ thị là đường cát tuyến nối hai điểm  $(a, f(a))$  và  $(b, f(b))$ .  $\square$

Ta còn có một phát triển hơn mà ta sẽ dùng về sau:

**Định lý 4.1.11 (Định lý giá trị trung bình Cauchy).** Nếu hai hàm  $f$  và  $g$  liên tục trên đoạn  $[a, b]$  và khả vi trong khoảng  $(a, b)$  thì tồn tại điểm  $c$  thuộc  $(a, b)$  sao cho

$$[f(b) - f(a)]g'(c) = [g(b) - g(a)]f'(c). \quad (4.1.1)$$

Nếu  $g(b) \neq g(a)$  và với mọi  $x \in (a, b)$  ta có  $g'(x) \neq 0$ , thì đẳng thức trên có thể được viết dưới dạng

$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}. \quad (4.1.2)$$

*Chứng minh.* Áp dụng Định lý Rolle cho hàm

$$h(x) = (f(b) - f(a))g(x) - (g(b) - g(a))f(x).$$

□

Từ Định lý giá trị trung bình ta được một hệ quả quan trọng:

**Hệ quả 4.1.12.** Nếu  $f'(x) = 0$  với mọi  $x$  trong khoảng  $(a, b)$  thì  $f$  là hàm hằng trên khoảng  $(a, b)$ .

*Chứng minh.* Với  $x_1$  và  $x_2$  bất kì thuộc khoảng  $(a, b)$ , ta chứng tỏ  $f(x_1) = f(x_2)$ . Giả sử  $x_1 < x_2$ . Áp dụng Định lý giá trị trung bình cho hàm  $f$  trên đoạn  $[x_1, x_2]$  ta được  $f(x_1) - f(x_2) = f'(c)(x_1 - x_2)$  với một  $c$  nào đó trong khoảng  $(x_1, x_2)$ . Vì  $f'(c) = 0$  nên ta được  $f(x_1) = f(x_2)$ . □

Một hệ quả đáng chú ý nữa là:

**Hệ quả 4.1.13.** Nếu  $f'(x) = g'(x)$  với mọi  $x$  trong khoảng  $(a, b)$ , thì  $f - g$  là hàm hằng trên khoảng  $(a, b)$ ; nghĩa là  $f$  và  $g$  sai khác một hằng số.

*Chứng minh.* Áp dụng hệ quả trên cho hàm  $f - g$ . □

## Bài tập

4.1.1. Tìm các điểm tới hạn của hàm số.

(a)  $f(x) = 4 + \frac{1}{3}x - \frac{1}{2}x^2$ .

(f)  $g(t) = |3t - 4|$ .

(b)  $f(x) = x^3 - 16x^2 - 15x$ .

(g)  $g(y) = \frac{y-1}{y^2-y+1}$ .

(c)  $f(x) = 2x^3 - 3x^2 - 36x$ .

(h)  $h(p) = \frac{p-1}{p^2+4}$ .

(d)  $f(x) = 2x^3 + x^2 + 2x$ .

(i)  $h(t) = t^{3/4} - 2t^{1/4}$ .

(e)  $g(t) = t^4 + t^3 + t^2 + 1$ .

(j)  $g(x) = x^{1/3} - x^{-2/3}$ .

4.1.2. Cho công thức của đạo hàm của hàm  $f$ . Hỏi  $f$  có bao nhiêu số tới hạn?

(a)  $f'(x) = 1 + \frac{210 \sin x}{x^2 - 6x + 10}$ .

(b)  $f'(x) = \frac{100 \cos^2 x}{10 + x^2} - 1$ .

4.1.3. Hãy kiểm tra rằng hàm số thoả mãn ba giả thiết của định lý Rolle trên khoảng cho trước. Sau đó tìm tất cả các số  $c$  thoả mãn kết luận của Định lý Rolle.

(a)  $f(x) = 5 - 12x + 3x^2$ ,  $[1, 3]$ .

(b)  $f(x) = x^3 - x^2 - 6x + 2$ ,  $[0, 3]$ .

(c)  $f(x) = \sqrt{x} - \frac{1}{3}x$ ,  $[0, 9]$ .

(d)  $f(x) = \cos 2x$ ,  $[\pi/8, 7\pi/8]$ .

4.1.4. Cho  $f(x) = 1 - x^{2/3}$ . Chứng tỏ rằng  $f(-1) = f(1)$  nhưng không tồn tại số  $c$  trong khoảng  $(-1, 1)$  sao cho  $f'(c) = 0$ . Tại sao điều này không mâu thuẫn với Định lý Rolle?

**4.1.5.** Cho  $f(x) = \tan x$ . Chứng tỏ rằng  $f(0) = f(\pi)$  nhưng không tồn tại số  $c$  trong khoảng  $(0, \pi)$  sao cho  $f'(c) = 0$ . Tại sao điều này không mâu thuẫn với định lý Rolle?

**4.1.6.** Cho  $f(x) = (x - 3)^{-2}$ . Chứng tỏ rằng không tồn tại  $c$  trong khoảng  $(1, 4)$  sao cho  $f(4) - f(1) = f'(c)(4 - 1)$ . Tại sao điều này không mâu thuẫn với định lý Lagrange?

**4.1.7.** Cho  $f(x) = 2 - |2x - 1|$ . Chứng tỏ rằng không tồn tại  $c$  sao cho  $f(3) - f(0) = f'(c)(3 - 0)$ . Tại sao điều này không mâu thuẫn với định lý Lagrange?

**4.1.8.** Chứng tỏ rằng phương trình có duy nhất một nghiệm thực.

(a)  $2x + \cos x = 0$

(b)  $2x - 1 - \sin x = 0$

**4.1.9.** Chứng tỏ rằng phương trình  $x^3 - 15x + c = 0$  có nhiều nhất một nghiệm trong đoạn  $[-2, 2]$ .

**4.1.10.** Chứng tỏ rằng phương trình  $x^4 + 4x + c = 0$  có nhiều nhất hai nghiệm.

**4.1.11.** Cho  $f(x) = x(x^2 - 1)(x^2 - 4)$ . Tìm số nghiệm của phương trình  $f'(x) = 0$ .

**4.1.12.** Chứng tỏ rằng một đa thức bậc  $n$  có nhiều nhất  $n$  nghiệm thực.

**4.1.13.** Sử dụng Định lý giá trị trung bình để chứng minh bất đẳng thức

$$|\sin a - \sin b| \leq |a - b| \quad \text{với mọi } a \text{ và } b.$$

**4.1.14.** Chứng tỏ nếu  $f$  khả vi trên  $\mathbb{R}$  và  $f'(x) < 1$  với mọi  $x$  thì  $f$  có nhiều nhất một điểm bất động (tức điểm  $x$  tại đó  $f(x) = x$ ).

**4.1.15.** Hai vận động viên bắt đầu chạy cùng lúc và đến đích cùng lúc. Chứng tỏ rằng tại một thời điểm nào đó trong quãng đường chạy họ có cùng vận tốc.

## 4.2 Đạo hàm và tính chất của hàm

### 4.2.1 Tính tăng, giảm, và cực trị

Một hàm số được gọi là **tăng** nếu giá trị của biến tăng thì giá trị của hàm không giảm:

$$x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \leq f(x_2).$$

Một hàm số được gọi là **tăng ngặt** nếu giá trị của biến tăng thì giá trị của hàm tăng:<sup>1</sup>

$$x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2).$$

Về mặt hình học, nếu hàm là tăng ngặt thì đồ thị của hàm sẽ hướng lên khi đi từ trái sang phải.

Tương tự, hàm được gọi là **giảm** nếu giá trị của biến tăng thì giá trị của hàm không tăng:

$$x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \geq f(x_2),$$

và là **giảm ngặt** nếu giá trị của biến tăng thì giá trị của hàm giảm:

$$x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2).$$

Đồ thị của hàm giảm ngặt sẽ hướng xuống khi đi từ trái sang phải.

Ta có một công cụ hiệu quả bằng vi phân để phát hiện tính chất tăng giảm. Về cơ bản, định lý sau nói một điều đơn giản là hàm tăng thì đạo hàm lớn hơn hay bằng 0. Người học có thể thấy được một lý luận nhanh trong trường hợp đơn giản: đạo hàm dương dẫn tới tỉ lệ biến thiên  $\frac{\Delta y}{\Delta x}$  dương, do đó biến thiên của giá trị của hàm  $\Delta y$  phải dương khi biến thiên của giá trị của biến  $\Delta x$  là dương, tức là hàm là tăng. Những lý luận nhanh cho trường hợp đơn giản như vậy giúp chúng ta hiểu dễ dàng hơn và nhanh chóng hơn nội dung chính của kết quả.

<sup>1</sup>Một số tài liệu như [Ste16] định nghĩa hàm tăng tương ứng với hàm tăng ngặt trong tài liệu này.



**Định lý 4.2.1.** Giả sử  $f$  liên tục trên đoạn  $[a, b]$  và khả vi trên khoảng  $(a, b)$ . Hàm  $f$  là tăng trên  $[a, b]$  khi và chỉ khi  $f' \geq 0$  trên  $(a, b)$ . Hàm  $f$  là giảm trên  $[a, b]$  khi và chỉ khi  $f' \leq 0$  trên  $(a, b)$ .

*Chứng minh.* Giả sử  $f$  là hàm tăng. Đạo hàm của  $f$  là giới hạn của tỉ lệ thay đổi  $\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$ . Lấy  $\Delta x > 0$  thì  $f(x + \Delta) \geq f(x)$ , do đó tỉ lệ trên lớn hơn hay bằng 0, dẫn tới giới hạn  $f'(x)$  phải lớn hơn hay bằng 0. Trường hợp hàm giảm rõ ràng là tương tự.

Chiều ngược lại, lấy hai điểm bất kỳ  $x_1, x_2$  trong đoạn  $[a, b]$ . Giả sử  $x_1 < x_2$ . Theo Định lý giá trị trung bình 4.1.10, tồn tại  $c$  thuộc  $(x_1, x_2)$  để

$$f(x_2) - f(x_1) = f'(c)(x_2 - x_1).$$

Vì  $x_2 - x_1 > 0$  nên  $f(x_2) - f(x_1)$  cùng dấu với  $f'(c)$ . Từ đây ta suy ra các kết luận của định lý.  $\square$

Chứng minh chặt chẽ và chính xác trên có thể giúp chúng ta thấy những điều mà lý luận sơ lược trước đó không chỉ ra, chẳng hạn từ chứng minh trên ta có thể nhận thấy một kết quả đáng chú ý khác: Nếu  $f' > 0$  trên  $(a, b)$  thì  $f$  tăng ngặt trên  $(a, b)$ .

Ta suy ra ngay một tiêu chuẩn rất hiệu quả, thường dùng để khảo sát tính tăng giảm của hàm:

**Định lý 4.2.2 (Tiêu chuẩn đạo hàm bậc nhất cho cực trị).** Cho hàm số  $f$  liên tục tại  $c$  và khả vi trong lân cận của  $c$ , nhưng không nhất thiết khả vi tại  $c$ . Giả sử  $c$  là một điểm tới hạn của  $f$ .

- (a) Nếu  $f'(x) > 0$  ở phía bên trái của  $c$  và  $f'(x) < 0$  ở phía bên phải của  $c$  thì  $f$  có cực đại địa phương tại  $c$ .
- (b) Nếu  $f'(x) < 0$  ở phía bên trái của  $c$  và  $f'(x) > 0$  ở phía bên phải của  $c$  thì  $f$  có cực tiểu địa phương tại  $c$ .
- (c) Nếu  $f'(x)$  không đổi dấu quanh điểm  $c$  thì  $f$  không có cực trị tại  $c$ .

Giả sử hàm  $f$  có đạo hàm liên tục trên một khoảng, thì một điểm tới hạn của  $f$  trong khoảng đó phải là một điểm dừng của  $f$ . Nếu  $a$  và  $b$  là hai điểm dừng liên tiếp của  $f$ , nghĩa là giữa  $a$  và  $b$  không có điểm dừng nào khác, thì  $f'$  phải luôn dương hoặc luôn âm trên khoảng  $(a, b)$  (một hệ quả của Định lý giá trị trung gian 2.2.11), tức là  $f'$  không đổi dấu trên  $(a, b)$ . Nhận xét này cho chúng ta thuật toán sau.

**Xét tính tăng giảm và tìm cực trị của một hàm có đạo hàm liên tục trên một khoảng:**

**Bước 1:** Tìm các điểm tới hạn của hàm, bằng cách giải phương trình  $f'(x) = 0$ .

**Bước 2:** Xét dấu của đạo hàm  $f'$  quanh các điểm tới hạn tìm được ở Bước 1. Trên khoảng giữa hai điểm tới hạn liên tiếp, dấu của  $f'$  được xác định bởi dấu của  $f'$  tại một điểm bất kì trong khoảng đó. Nếu dấu của  $f'$  là dương thì  $f$  tăng trong khoảng đó, nếu dấu của  $f'$  là âm thì  $f$  giảm trong khoảng đó.

**Bước 3:** Tại một điểm tới hạn, nếu  $f'$  đổi từ âm sang dương thì  $f$  có cực tiểu địa phương tại đó, nếu  $f'$  đổi từ dương sang âm thì  $f$  có cực đại địa phương tại đó, nếu  $f'$  không đổi dấu thì  $f$  không có cực trị địa phương tại đó.

**Ví dụ 4.2.3.** Tiếp tục Ví dụ 4.1.6, ta xét tính tăng giảm của hàm  $f(x) = 2x^4 - 8x^2 - 17$ .

Ta đã có  $f'(x) = 8x^3 - 16x$  và  $f$  có các điểm dừng tại  $x = 0, x = \pm\sqrt{2}$ . Viết  $f'(x) = 8x(x^2 - 2)$  ta dễ dàng xét dấu của  $f'$ . Một cách khác là trên mỗi khoảng giữa hai điểm dừng ta lấy một điểm tùy ý rồi tìm dấu của  $f'$  tại điểm đó. Chẳng hạn trên khoảng  $(-\sqrt{2}, 0)$  thì  $f'(-1) = 8 > 0$ , do đó  $f'(x) > 0$  với mọi  $x \in (-\sqrt{2}, 0)$ . Ta trình bày thông tin trong một bảng biến thiên:

$x$	$-\infty$	$-\sqrt{2}$	$0$	$\sqrt{2}$	$\infty$			
$f'(x)$		-	0	+	0	-	0	+
$f(x)$		$\searrow$	$\nearrow$	$\searrow$	$\nearrow$			

Ta có hai cực tiểu địa phương tại  $x = \pm\sqrt{2}$  và một cực đại địa phương tại  $x = 0$ .

## 4.2.2 Tính lồi, lõm, và điểm uốn

Ở phần này ta dùng đạo hàm bậc hai để khảo sát hàm.

**Định lý 4.2.4 (Tiêu chuẩn đạo hàm bậc hai cho cực trị).** *Giả sử  $f$  có đạo hàm cấp hai liên tục quanh điểm  $c$  và  $c$  là một điểm dừng của  $f$ .*

- (a) Nếu  $f''(c) > 0$  thì  $f$  đạt cực tiểu địa phương tại  $c$ .
- (b) Nếu  $f''(c) < 0$  thì  $f$  đạt cực đại địa phương tại  $c$ .

Tiêu chuẩn này chỉ cần tính đạo hàm bậc hai tại điểm dừng mà không cần khảo sát dấu của đạo hàm bậc nhất quanh điểm dừng.

*Chứng minh.* Nếu  $f''(c) > 0$  thì do tính liên tục của  $f''$ , trong một khoảng nào đó chứa  $c$  thì  $f''(x) > 0$ , do đó  $f'$  tăng ngặt trong khoảng đó. Vì  $f'(c) = 0$  nên  $f'(x) < 0$  bên trái  $c$  và  $f'(x) > 0$  bên phải  $c$ . Vậy hàm  $f$  giảm bên trái  $c$  và tăng bên phải  $c$ , do đó  $f$  có cực tiểu địa phương tại  $c$ , như trong Định lý 4.2.1.  $\square$

**Ví dụ 4.2.5.** Tiếp tục Ví dụ 4.1.6, ta xét cực trị của hàm  $f(x) = 2x^4 - 8x^2 - 17$ .

Ta có  $f'(x) = 8x^3 - 16x$  và  $f$  có các điểm dừng tại  $x = 0, x = \pm\sqrt{2}$ . Tính đạo hàm bậc hai ta được  $f''(x) = 24x^2 - 16$ . Ta tính được  $f''(0) < 0, f''(-\sqrt{2}) = f''(\sqrt{2}) > 0$ . Vậy ta có hai cực tiểu địa phương tại  $x = \pm\sqrt{2}$  và một cực đại địa phương tại  $x = 0$ .

**Định nghĩa 4.2.6 (hàm lồi – hàm lõm).** Hàm  $f$  được gọi là **lồi** (convex) trên  $(a, b)$  nếu với mọi  $x, y$  thuộc  $(a, b)$  và với mọi  $\alpha$  thuộc  $[0, 1]$  thì

$$f(\alpha x + (1 - \alpha)y) \leq \alpha f(x) + (1 - \alpha)f(y). \quad (4.2.1)$$

Hàm  $f$  được gọi là **hàm lõm** (concave) trên  $(a, b)$  nếu với mọi  $x, y$  thuộc  $(a, b)$  và với mọi  $\alpha$  thuộc  $[0, 1]$  thì

$$f(\alpha x + (1 - \alpha)y) \geq \alpha f(x) + (1 - \alpha)f(y). \quad (4.2.2)$$

Ý nghĩa hình học: Hàm lồi trên một khoảng nghĩa là mọi cung của đồ thị luôn nằm dưới dây cung, tức là đồ thị giữa hai điểm bất kì luôn nằm dưới đoạn cát tuyến nối hai điểm đó. <sup>2</sup>

<sup>2</sup>Chú ý là một số tài liệu như [Ste16] dùng thuật ngữ hơi khác: lõm lên (concave upward) cho lồi, và lõm xuống (concave downward) cho lõm. Có tài liệu, như giáo trình giải tích lớp 12 hiện hành, dùng thuật ngữ ngược lại với ở đây. Vì vậy khi đọc tài liệu khác cần xem định nghĩa được dùng là gì. Thuật ngữ được dùng ở đây theo tập quán trong toán nâng cao.

**Định lý 4.2.7.** Giả sử hàm  $f$  có đạo hàm đến cấp 2 liên tục trong khoảng  $(a, b)$ . Điều kiện cần và đủ để hàm  $f$  lồi trên  $(a, b)$  là  $f'' \geq 0$  trên  $(a, b)$ . Tương tự, điều kiện cần và đủ để hàm  $f$  lõm trên  $(a, b)$  là  $f'' \leq 0$  trên  $(a, b)$ .

*Chứng minh.* Với  $x_1 < x_2$  và  $x = \alpha x_1 + (1 - \alpha)x_2$ , thì  $\alpha = \frac{x_2 - x}{x_2 - x_1}$ . Ta có thể viết lại điều kiện lồi (4.2.1) như sau: Với mọi  $x_1 < x < x_2$  thì

$$f(x) \leq \frac{x_2 - x}{x_2 - x_1} f(x_1) + \frac{x - x_1}{x_2 - x_1} f(x_2).$$

Có thể kiểm được là công thức này tương đương với

$$\frac{f(x) - f(x_1)}{x - x_1} \leq \frac{f(x) - f(x_2)}{x - x_2}.$$

Điều kiện cần: Cho  $x \rightarrow x_1$  và cho  $x \rightarrow x_2$  trong công thức trên ta được

$$f'(x_1) \leq \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} \leq f'(x_2).$$

Vậy  $f'$  là hàm tăng trên  $(a, b)$ , do đó  $f'' \geq 0$  trên  $(a, b)$ , theo Định lý 4.2.1.

Điều kiện đủ: Giả sử  $f'' \geq 0$  trên  $(a, b)$ . Theo Định lý 4.2.1 thì  $f'$  là hàm tăng trên  $(a, b)$ . Theo Định lý giá trị trung bình Lagrange, nếu  $x$  thuộc  $(x_1, x_2)$  thì tồn tại  $\theta_1, \theta_2$ ,  $x_1 < \theta_1 < x < \theta_2 < x_2$  để

$$\frac{f(x) - f(x_1)}{x - x_1} = f'(\theta_1); \quad \frac{f(x) - f(x_2)}{x - x_2} = f'(\theta_2).$$

Vì  $f'(\theta_1) \leq f'(\theta_2)$  nên  $\frac{f(x) - f(x_1)}{x - x_1} \leq \frac{f(x) - f(x_2)}{x - x_2}$ . Vậy  $f$  là hàm lồi.

Chứng minh cho tính lõm là tương tự.  $\square$

Chứng minh trên cũng chứa một đặc trưng của tính lồi: hàm khả vi là lồi khi và chỉ khi đạo hàm bậc một là hàm tăng.

**Định nghĩa 4.2.8.** Điểm của đồ thị mà ở đó đồ thị đổi tính lồi, từ lồi sang lõm hay ngược lại, được gọi là **điểm uốn** của đồ thị, hay của hàm.

Ta lập tức có một tiêu chuẩn đạo hàm bậc 2 cho điểm uốn:

**Mệnh đề 4.2.9.** Nếu hàm số  $f$  có đạo hàm bậc 2 liên tục quanh điểm  $c$  và đổi dấu tại  $c$  thì  $f$  có điểm uốn tại  $c$ .

Chú ý rằng do giả thiết liên tục của đạo hàm bậc 2, vì  $f''$  đổi dấu tại  $c$  nên phải có  $f''(c) = 0$  (đây là một hệ quả của Định lý giá trị trung gian 2.2.11). Từ đó ta có một thuật toán đơn giản để xét tính lồi và điểm uốn của một hàm có đạo hàm bậc 2 liên tục:

**Xét tính lồi lõm và tìm điểm uốn của một hàm có đạo hàm bậc hai liên tục trên một khoảng:**

**Bước 1:** Tìm các điểm tại đó đạo hàm bậc 2 bằng 0, tức là giải phương trình  $f''(x) = 0$ .

**Bước 2:** Xét dấu của đạo hàm bậc hai  $f''$  quanh các điểm tìm được ở Bước 1. Trên khoảng giữa hai điểm liên tiếp, dấu của  $f''$  được xác định bởi dấu của  $f''$  tại một điểm bất kì trong khoảng đó. Nếu dấu của  $f''$  là dương thì  $f$  lồi trong khoảng đó, nếu dấu của  $f''$  là âm thì  $f$  lõm trong khoảng đó.

**Bước 3:** Tại mỗi điểm xét ở Bước 2, nếu  $f''$  đổi dấu thì hàm có điểm uốn tại đó.

**Ví dụ 4.2.10.** Tiếp tục Ví dụ 4.1.6, ta xét tính lồi của hàm  $f(x) = 2x^4 - 8x^2 - 17$ .

Ta đã có  $f''(x) = 24x^2 - 16 = 8(3x^2 - 2)$ . Giải phương trình  $f''(x) = 0$  ta được  $x = \pm\sqrt{2/3}$ . Ta tìm dấu của  $f''(x)$  trên mỗi khoảng  $(-\infty, -\sqrt{2/3})$ ,  $(-\sqrt{2/3}, \sqrt{2/3})$ ,  $(\sqrt{2/3}, \infty)$ , bằng cách xét dấu hay tính giá trị của  $f''(x)$  tại một điểm trong khoảng, chẳng hạn ta thấy  $f''(0) < 0$  nên  $f''(x) < 0$  trên  $(-\sqrt{2/3}, \sqrt{2/3})$ . Ta thường tóm tắt thông tin trong một bảng:

$x$	$-\infty$	$-\sqrt{2/3}$	$\sqrt{2/3}$	$\infty$
$f''(x)$	+	0	-	0
$f(x)$	lồi		lõm	lồi

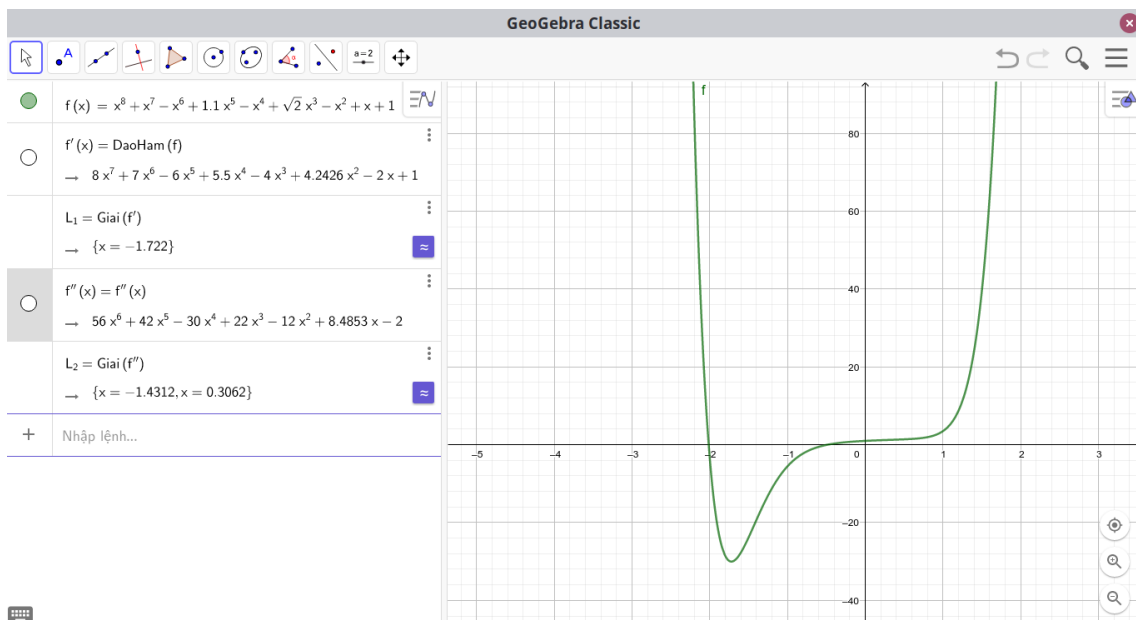
Từ bảng trên ta thấy hàm  $f$  có hai điểm uốn ở  $x = \pm\sqrt{2/3}$ .

## Vẽ đồ thị của hàm số

Cho một hàm cụ thể, để khảo sát và vẽ đồ thị của hàm về cơ bản ta kết hợp việc khảo sát đạo hàm bậc một và đạo hàm bậc hai ở phần trên, cùng với xét thêm một số thông tin thêm như các giới hạn của hàm tại các điểm hàm không xác định hay giới hạn của hàm ở  $-\infty, \infty$  (được gọi là các tiệm cận đứng và tiệm cận ngang). Việc này người học đã làm nhiều ở trung học.

Ngày nay việc vẽ đồ thị của các hàm được cho bằng công thức sơ cấp được trợ giúp rất nhiều với sự tiến bộ của máy tính. Người học có thể dễ dàng dùng một số phần mềm phổ biến và dễ sử dụng để vẽ đồ thị như GeoGebra [GeoG], Wolfram Alpha [Wolf], Maple, Matlab.

**Ví dụ 4.2.11.** Hình 4.2.1 vẽ đồ thị của một hàm bằng phần mềm GeoGebra. Phần mềm này còn có thể tính các đạo hàm bậc nhất và bậc hai, và giải xấp xỉ phương trình, nhờ đó cho chúng ta giá trị xấp xỉ của các điểm cực trị và điểm uốn.



Hình 4.2.1: Đồ thị của hàm  $f(x) = x^8 + x^7 - x^6 + 1,1x^5 - x^4 + \sqrt{2}x^3 - x^2 + x + 1$ .

Để từ đồ thị của hàm số thấy được các tính chất của hàm số ta cần nắm vững các mối quan hệ giữa tính chất của hàm và đồ thị của hàm trong mục này.

### 4.2.3 Xấp xỉ tuyến tính

Giả sử hàm  $f$  khả vi tại  $x$ . Ta có

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h},$$

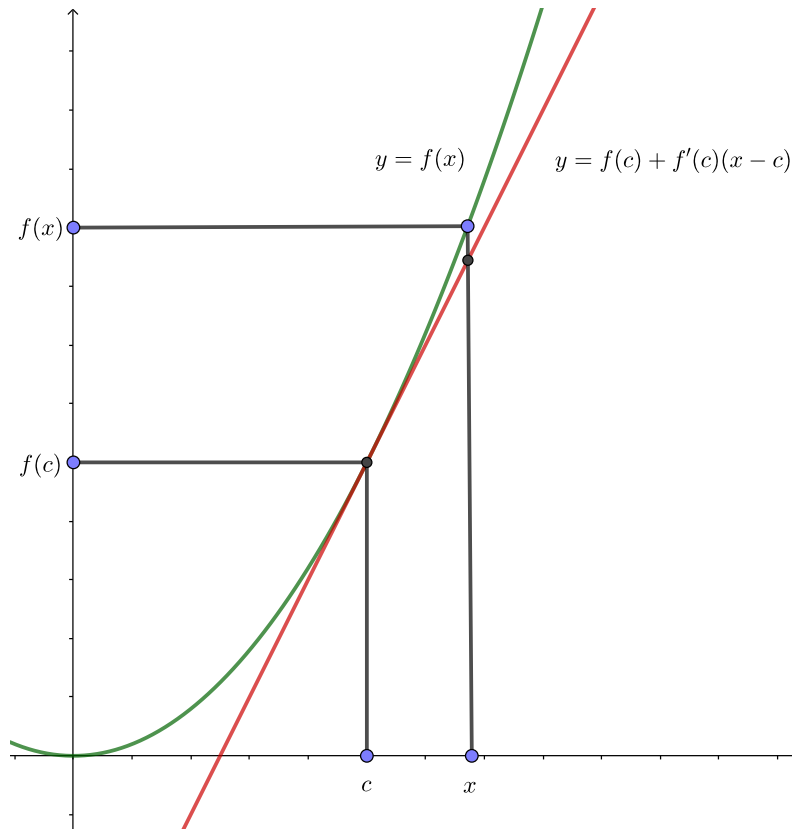
Như thế khi  $h$  “nhỏ” thì  $\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$  “gần bằng”  $f'(x)$ , do đó  $f(x+h) - f(x)$  “gần bằng”  $f'(x)h$ . Kí hiệu  $\approx$  là “gần bằng” thì đây là nguyên lí xấp xỉ tuyến tính:

$$h \approx 0 \implies f(x+h) - f(x) \approx f'(x)h. \quad (4.2.3)$$

Viết  $\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x)$  thì lí luận trên nói một điều đơn giản rằng khi biến thiên  $\Delta x$  của  $x$  là nhỏ thì tỉ lệ biến thiên  $\frac{\Delta y}{\Delta x}$  gần bằng tỉ lệ biến thiên tức thời  $f'(x)$ , tức là

$$\Delta x \approx 0 \implies \Delta y \approx f'(x)\Delta x.$$

Nguyên lí xấp xỉ tuyến tính đơn giản, dễ sử dụng và có hiệu quả trong nhiều vấn đề về sau.



Hình 4.2.2: Ý nghĩa hình học của xấp xỉ tuyến tính.

Không có gì đáng ngạc nhiên là ta còn có một giải thích hình học cho xấp xỉ tuyến tính. Từ ý nghĩa của đạo hàm, ta thấy xấp xỉ tuyến tính chẳng qua là xấp xỉ đường cong đồ thị bởi tiếp tuyến của đồ thị:

$$x \approx c \implies f(x) \approx f(c) + f'(c)(x - c).$$

**Ví dụ 4.2.12.** Ước lượng  $\sqrt{1,01}$ .

Ta thấy 1,01 gần bằng 1, nên ta dùng xấp xỉ tuyến tính của  $f(x) = \sqrt{x}$  tại 1. Do  $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$  nên

$$\sqrt{1,01} \approx \sqrt{1} + \frac{1}{2\sqrt{1}}(1,01 - 1) = 1,005.$$

Chú ý là trong trường hợp này xấp xỉ tuyến tính có thể được tính nhanh chóng và dễ dàng. Giá trị chính xác hơn cho bởi máy tính là 1,000499875....

Ta có thể khảo sát ở mức độ chính xác cao hơn như sau. Ta có

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} - f'(x) = 0$$

do đó

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x) - f'(x)h}{h} = 0$$

Đặt  $r(h) = f(x+h) - f(x) - f'(x)h$  thì  $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{r(h)}{h} = 0$  và

$$f(x+h) = f(x) + f'(x)h + r(h).$$

Trong một số tài liệu xấp xỉ tuyến tính còn được diễn đạt thông qua các “dạng vi phân”.

#### 4.2.4 Qui tắc l'Hôpital và ứng dụng trong tính giới hạn

Ta có một qui tắc rất thuận tiện, được gọi là qui tắc l'Hôpital,<sup>3</sup> để tìm các giới hạn dạng vô định. Qui tắc này nói rằng dưới những điều kiện nhất định thì

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

##### Khử dạng vô định $\frac{0}{0}$

**Mệnh đề 4.2.13.** Giả sử  $f(x)$  và  $g(x)$  khả vi trong khoảng  $(a, b)$  và  $g'(x) \neq 0$  với mọi  $x \in (a, b)$ . Nếu  $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow a^+} g(x) = 0$  và  $\lim_{x \rightarrow a^+} \frac{f'(x)}{g'(x)}$  bằng một số thực hoặc  $-\infty$  hoặc  $\infty$ , thì

$$\lim_{x \rightarrow a^+} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow a^+} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

Mệnh đề vẫn đúng nếu thay giới hạn  $x \rightarrow a^+$  bằng  $x \rightarrow b^-$  hoặc  $x \rightarrow c$  với  $c \in (a, b)$ . Trường hợp  $a = -\infty$  và  $b = \infty$  mệnh đề cũng đúng.

*Chứng minh.* Xét trường hợp  $a$  hữu hạn. Ta xây dựng hai hàm mới

$$F(x) = \begin{cases} f(x) & \text{nếu } a < x < b, \\ 0 & \text{nếu } x = a, \end{cases}$$

và

$$G(x) = \begin{cases} g(x) & \text{nếu } a < x < b, \\ 0 & \text{nếu } x = a. \end{cases}$$

<sup>3</sup>l'Hôpital là tên một nhà toán học người Pháp sống vào cuối thế kỉ 17, được đọc theo tiếng Pháp tựa như Lô-pi-tan, và còn được viết là l'Hospital

Hai hàm này đơn giản là mở rộng liên tục của  $f$  và  $g$  lên  $[a, b)$ . Khi đó ta có thể kiểm được  $F$  và  $G$  thỏa các giả thiết của Định lý giá trị trung bình Cauchy 4.1.11 cho đoạn  $[a, x]$  với mọi  $x$  thuộc  $(a, b)$ , do đó tồn tại  $c$  thuộc  $(a, x)$  sao cho

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{F(x)}{G(x)} = \frac{F(x) - F(a)}{G(x) - G(a)} = \frac{F'(c)}{G'(c)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}.$$

Vậy

$$\lim_{x \rightarrow a^+} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{c \rightarrow a^+} \frac{f'(c)}{g'(c)}.$$

Trường hợp  $x \rightarrow b^-$  với  $b$  hữu hạn ta chứng minh tương tự.

Trường hợp  $a = -\infty$  hoặc  $b = \infty$  ta chứng minh tương tự bằng cách đổi biến  $x = \frac{1}{t}$ .  $\square$

Chú ý là nếu  $\lim_{x \rightarrow a^+} \frac{f'(x)}{g'(x)}$  vẫn còn ở dạng vô định  $\frac{0}{0}$  và các điều kiện được thỏa thì ta có thể áp dụng tiếp qui tắc l'Hôpital một lần nữa.

**Ví dụ 4.2.14.** Áp dụng qui tắc l'Hôpital ba lần:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x^3}{x - \sin x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{6x^2}{1 - \cos x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{12x}{\sin x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{12}{-\cos x} = -12.$$

### Khử dạng vô định $\frac{\infty}{\infty}$

**Mệnh đề 4.2.15.** Giả sử  $f(x)$  và  $g(x)$  khả vi trong khoảng  $(a, b)$  và  $g'(x) \neq 0$  với mọi  $x \in (a, b)$ . Nếu  $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow a^+} g(x) = \pm\infty$  và  $\lim_{x \rightarrow a^+} \frac{f'(x)}{g'(x)}$  bằng một số thực hoặc  $-\infty$  hoặc  $\infty$ , thì

$$\lim_{x \rightarrow a^+} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow a^+} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

Mệnh đề vẫn đúng nếu thay giới hạn  $x \rightarrow a^+$  bằng  $x \rightarrow b^-$  hoặc  $x \rightarrow c$  với  $c \in (a, b)$ . Trường hợp  $a = -\infty$  và  $b = \infty$  mệnh đề cũng đúng.

*Chứng minh.* Xét trường hợp  $L$  là một số thực (nếu  $L = \pm\infty$  ta xét  $\frac{g(x)}{f(x)}$ ). Với  $\epsilon > 0$  cho trước bất kỳ, do  $\lim_{x \rightarrow a^+} \frac{f'(x)}{g'(x)} = L$  nên tồn tại  $c$  thuộc  $(a, b)$  sao cho với mọi  $x$  thuộc  $(a, c)$  thì  $\left| \frac{f'(x)}{g'(x)} - L \right| \leq \frac{\epsilon}{2}$ . Với mọi  $x$  thuộc  $(a, c)$ , áp dụng Định lý giá trị trung bình Cauchy 4.1.11 cho đoạn  $[x, c]$ , ta có  $\theta \in (x, c)$  sao cho

$$\frac{f(x) - f(c)}{g(x) - g(c)} = \frac{f'(\theta)}{g'(\theta)},$$

do đó

$$\left| \frac{f(x) - f(c)}{g(x) - g(c)} - L \right| < \frac{\epsilon}{2}.$$

Mặt khác ta viết

$$\frac{f(x)}{g(x)} - L = \frac{f(c) - Lg(c)}{g(x)} + \left(1 - \frac{g(c)}{g(x)}\right) \left(\frac{f(x) - f(c)}{g(x) - g(c)} - L\right).$$

Vì  $g(x) \rightarrow \pm\infty$  khi  $x \rightarrow a^+$  nên tồn tại  $c_1$ ,  $a < c_1 < c$ , sao cho với  $x$  thuộc  $(a, c_1)$  ta có

$$\left| \frac{f(c) - Lg(c)}{g(x)} \right| < \frac{\epsilon}{2}, \quad \left| 1 - \frac{g(c)}{g(x)} \right| < 1.$$

Từ đó ta suy ra được, với mọi  $x \in (a, c_1)$ ,

$$\left| \frac{f(x)}{g(x)} - L \right| < \epsilon,$$

nghĩa là  $\lim_{x \rightarrow a^+} \frac{f(x)}{g(x)} = L$ .

Các trường hợp  $x \rightarrow b^-$ ,  $x \rightarrow c$ ,  $a = -\infty$ ,  $b = \infty$  ta làm tương tự như đã trình bày trong chứng minh của Mệnh đề 4.2.13.  $\square$

**Ví dụ 4.2.16.**

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln x}{x^2} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1/x}{2x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{2x^2} = 0.$$

Ta có thể dùng qui tắc l'Hôpital để khử các dạng vô định khác như  $0 \times \infty$ ,  $\infty - \infty$ ,  $0^0$ ,  $1^\infty$ ,  $\infty^0$ , ... bằng cách biến đổi đại số để đưa về hai trường hợp trên. Ta minh họa bằng những ví dụ sau.

**Ví dụ 4.2.17 (Khử dạng vô định  $0 \times \infty$ ).**

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} x \ln x = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln x}{1/x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1/x}{-1/x^2} = \lim_{x \rightarrow 0^+} (-x) = 0.$$

**Ví dụ 4.2.18 (Khử dạng vô định  $\infty - \infty$ ).**

$$\lim_{x \rightarrow 1} \left( \frac{x}{x-1} - \frac{1}{\ln x} \right) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x \ln x - x + 1}{(x-1) \ln x} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln x}{\ln x + 1 - \frac{1}{x}} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1/x}{1/x + 1/x^2} = 1/2.$$

**Ví dụ 4.2.19 (Khử dạng vô định  $0^0$ ).**

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} x^x.$$

Trước hết ta tính

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \ln(x^x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} x \ln x = 0.$$

Vậy

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} x^x = 1.$$

**Ví dụ 4.2.20 (Khử dạng vô định  $1^\infty$ ).** Tính

$$\lim_{x \rightarrow 1} x^{\frac{1}{1-x}}.$$

Lấy hàm  $\ln$ , ta có  $\ln x^{\frac{1}{1-x}} = \frac{\ln x}{1-x}$ . Ta tính bằng qui tắc l'Hôpital:

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln x}{1-x} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{-x} = -1.$$

Dùng tính liên tục của hàm  $\ln$  và hàm mũ, ta viết được

$$\lim_{x \rightarrow 1} x^{\frac{1}{1-x}} = \lim_{x \rightarrow 1} e^{\ln x^{\frac{1}{1-x}}} = \lim_{x \rightarrow 1} e^{\frac{\ln x}{1-x}} = e^{-1} = 1/e.$$

**Ví dụ 4.2.21 (Khử dạng vô định  $\infty^0$ ).** Tính

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \left( \frac{1}{x} \right)^x.$$



Lấy hàm  $\ln$ , ta có

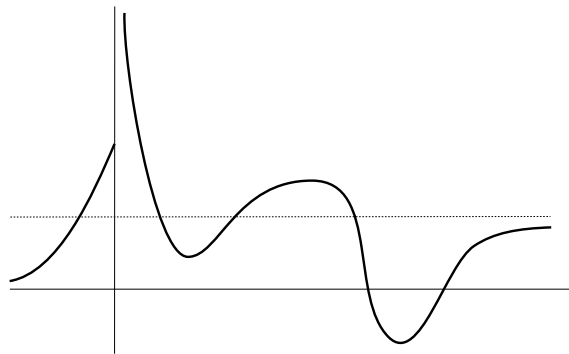
$$\ln \left( \frac{1}{x} \right)^x = x(\ln 1 - \ln x) = -x \ln x.$$

Ta đã có bằng qui tắc l'Hôpital là  $\lim_{x \rightarrow 0^+} x \ln x = 0$ , nên dùng tính liên tục của hàm  $\ln$  và hàm mũ, ta viết được

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \left( \frac{1}{x} \right)^x = \lim_{x \rightarrow 0^+} e^{\ln \left( \frac{1}{x} \right)^x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} e^{-x \ln x} = e^0 = 1.$$

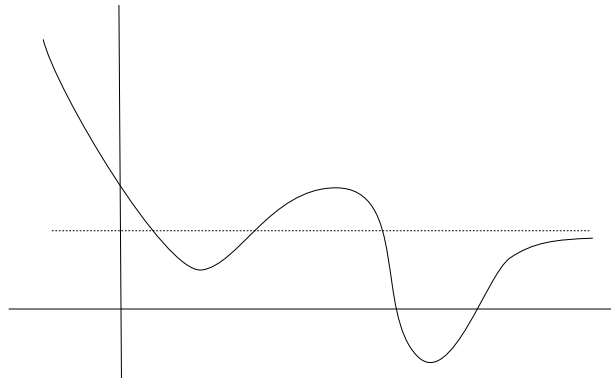
## Bài tập

**4.2.1.** Từ đồ thị ở Hình 4.2.3, hãy đặt tên cho các điểm quan tâm và chỉ ra tất cả các tính chất quan sát được, như: miền xác định, sự liên tục, sự khả vi, sự tăng, sự giảm, cực trị địa phương, cực trị toàn cục, tính lồi, tính lõm, điểm uốn, tiệm cận ... :



Hình 4.2.3

**4.2.2.** Từ đồ thị ở Hình 4.2.4, hãy đặt tên cho các điểm quan tâm và chỉ ra tất cả các tính chất quan sát được, như: miền xác định, sự liên tục, sự khả vi, sự tăng, sự giảm, cực trị địa phương, cực trị toàn cục, tính lồi, tính lõm, điểm uốn, tiệm cận ... :



Hình 4.2.4

**4.2.3.** GDP hàng năm của Việt Nam từ năm 2010 tới 2012 được cho trong bảng sau.

Năm	2010	2011	2012
tốc độ tăng trưởng GDP	6.4%	6.2%	5.2%

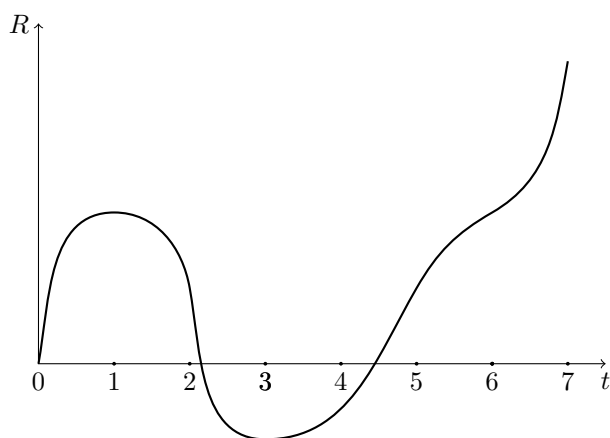
Hãy phác họa đồ thị của GDP of Việt Nam theo thời gian, thể hiện tính tăng/giảm, lồi/lõm.

**4.2.4.** Dưới đây là các phát biểu về tình hình kinh doanh của một doanh nghiệp. Hãy tìm các đồ thị của doanh số theo thời gian nào mà ở đó các phát biểu là đúng:



- (a) Triển vọng tốt, tốc độ tăng trưởng ngày càng tăng.
- (b) Đang giảm sút, nhưng không nhanh như trước.
- (c) Đang giảm sút, và tình hình ngày càng tệ hơn.
- (d) Đang tăng trưởng, nhưng tốc độ tăng trưởng chậm lại.
- (e) Tốc độ tăng trưởng đã giảm nhưng nay đang tăng.
- (f) Tốc độ tăng trưởng đã tăng nhưng nay đang giảm.

**4.2.5.** Dưới đây là đồ thị của doanh thu  $R$  của một doanh nghiệp theo thời gian  $t$ . Từ đồ thị hãy cho biết khi nào những điều sau xảy ra:



- (a) Triển vọng rất lạc quan: doanh thu đang tăng và ngày càng tăng nhanh hơn.
- (b) Doanh thu đang giảm sút nhưng tình hình đang được cải thiện.
- (c) Doanh thu đang giảm sút và tình hình ngày càng tệ hơn.
- (d) Doanh thu đang tăng nhưng đang trở nên ổn định.

**4.2.6.** Hãy vẽ đồ thị của hàm  $f$  thỏa tất cả các tính chất sau:

- (a) cực đại địa phương ở  $(3, 4)$ ,
- (b) cực đại toàn cục ở  $(-2, 6)$ ,
- (c) cực tiểu địa phương ở  $(1, 2)$
- (d) điểm uốn ở  $(-1, 5)$ ,  $(2, 3)$ ,  $(4, 1)$ ,
- (e)  $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 0$ ,
- (f)  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$ .

**4.2.7.** Hãy vẽ đồ thị của hàm  $f$  thỏa tất cả các tính chất sau:

- (a) cực đại địa phương ở  $x = -3$ ,  $x = 1$ ,
- (b) cực tiểu địa phương ở  $x = -1$ ,  $x = 3$ ,
- (c) lõm trên  $(-\infty, -2)$ ,  $(0, 2)$ ,
- (d) lồi trên  $(-2, 0)$ ,  $(2, 4)$ ,
- (e) không liên tục ở  $x = 4$ ,
- (f) không khả vi ở  $x = 2$ .

**4.2.8.** Hãy vẽ đồ thị của hàm  $f$  thỏa tất cả các tính chất sau:

- (a) cực đại địa phương ở  $x = -1, x = 3$ ,
- (b) cực tiểu địa phương ở  $x = -3, x = 1$ ,
- (c) lõm trên  $(-2, 0), (2, \infty)$ ,
- (d) lồi trên  $(-\infty, -2), (0, 2)$ ,
- (e) cắt trục  $x$  ở  $x = 4$ ,
- (f) cắt trục  $y$  ở  $y = 1$ .

**4.2.9.** Vẽ đồ thị của các hàm số sau và sử dụng đồ thị này để tìm các giá trị cực đại và cực tiểu toàn cục, cực đại và cực tiểu địa phương của  $f$ .

- (a)  $f(x) = \frac{1}{2}(3x - 1), \quad x \leq 3.$
- (b)  $f(x) = 2 - \frac{1}{3}x, \quad x \geq -2.$
- (c)  $f(x) = \frac{1}{x}, \quad x \geq 1.$
- (d)  $f(x) = \frac{1}{x}, \quad 1 < x < 3.$
- (e)  $f(x) = \sin x, \quad 0 \leq x < \pi/2.$
- (f)  $f(x) = \sin x, \quad 0 < x \leq \pi/2.$
- (g)  $f(x) = \sin x, \quad -\pi/2 \leq x \leq \pi/2.$
- (h)  $f(x) = \begin{cases} 1 - x & \text{nếu } 0 \leq x < 2 \\ 2x - 4 & \text{nếu } 2 \leq x \leq 3. \end{cases}$
- (i)  $f(x) = \begin{cases} 4 - x^2 & \text{nếu } -2 \leq x < 0 \\ 2x - 1 & \text{nếu } 0 \leq x \leq 2. \end{cases}$

**4.2.10.** Cho

$$f(x) = \begin{cases} 3^x - 2 & x < 0, \\ \sqrt{x} & 0 \leq x \leq 4, \\ \frac{8}{x} & x > 4. \end{cases}$$

- (a) Vẽ đồ thị của hàm số  $f$ .
- (b) Tìm miền giá trị của  $f$ .
- (c) Hàm  $f$  liên tục trên những khoảng nào? Giải thích.
- (d) Tìm các điểm tới hạn của hàm  $f$ . Giải thích.
- (e) Tìm hàm đạo hàm  $f'$ .

## Bài toán cực trị

**4.2.11.** Một cửa hàng định bán các bản sao của một tấm tranh. Nếu bán 50 bản họ có thể tính giá 400 nghìn đồng/bản. Nếu muốn bán nhiều hơn 50 bản thì cứ thêm một bản nhiều hơn 50 cửa hàng phải giảm giá mỗi bản thêm 5 nghìn đồng. Hỏi cửa hàng nên bán bao nhiêu bản để có doanh thu lớn nhất?

**4.2.12.** Giá  $p$  (đơn vị tiền/đơn vị sản phẩm) và doanh số  $x$  (số đơn vị sản phẩm bán được) cho một sản phẩm nhất định được cho bởi phương trình

$$x = 100 - 20p,$$

gọi là phương trình nhu cầu.

- (a) Tìm hàm doanh thu (số tiền thu được)  $R(x)$  từ việc bán  $x$  đơn vị sản phẩm.
- (b) Tìm doanh thu cận biên (marginal revenue), tức đạo hàm của doanh thu theo doanh số.
- (c) Tìm doanh thu cận biên khi doanh số là 40 đơn vị sản phẩm và giải thích ý nghĩa của con số này.
- (d) Tìm doanh số để được doanh thu lớn nhất.
- (e) Vẽ đồ thị của hàm  $R$ .
- (f) Hàm chi phí là  $C(x) = \frac{9}{4}x - 15$ . Vẽ đồ thị của hàm  $C$  trên cùng mặt phẳng với  $R$ .

- (g) Tìm doanh số để hòa vốn.  
 (h) Tìm doanh số để có lợi nhuận tối đa.

**4.2.13.** Một viên đạn được bắn lên với một tốc độ đầu cho trước bay dưới tác động của trọng trường. Hãy tìm góc bắn sao cho đạn bay xa nhất.

**4.2.14.** Trong số các tam giác cân có cùng chu vi, hãy tìm tam giác có diện tích lớn nhất.

**4.2.15.** Người ta dự đoán rằng Quỹ Bảo hiểm Xã hội có thể bị vỡ (tài sản còn bằng 0) nếu như số người đóng bảo hiểm không tăng lên hoặc quyền lợi của người được hưởng bảo hiểm không bị giảm xuống. Dữ liệu cho thấy tổng tài sản của Quỹ theo thời gian có thể được mô hình hóa bởi hàm

$$f(t) = -0.0129t^4 + 0.3087t^3 + 2.1760t^2 + 62.8466t + 506.2955 \quad (0 \leq t \leq 35)$$

ở đó  $f(t)$  được đo theo đơn vị tỉ đồng và  $t$  được đo theo năm, với  $t = 0$  ứng với 1995.

- (a) Vẽ đồ thị của  $f$  (dùng máy tính).  
 (b) Khi nào thì tài sản của Quỹ đạt mức cao nhất?  
 (c) Dựa trên mô hình này, khi nào thì Quỹ sẽ vỡ?  
 (d) Khi nào thì tài sản của Quỹ bắt đầu giảm sút?

**4.2.16.** Một mô hình được sử dụng cho năng suất  $Y$  của một cây trồng nông nghiệp dựa trên nồng độ nitơ  $N$  có trong đất (theo một đơn vị thích hợp) là

$$Y = \frac{kN}{1 + N^2}$$

với  $k$  là một hằng số. Hỏi nồng độ nitơ là bao nhiêu để cho năng suất lớn nhất?

**4.2.17.** Tốc độ quang hợp (theo đơn vị mg carbon/m<sup>3</sup>/h) ở một loài thực vật được mô hình hóa bởi hàm số

$$P = \frac{100l}{l^2 + l + 4}$$

trong đó  $l$  là cường độ ánh sáng (đo theo đơn vị hàng ngàn foot-nến). Hỏi ở cường độ sáng là bao nhiêu thì  $P$  là lớn nhất?

**4.2.18.** Một quần thể động vật bị nhiễm bệnh. Sau  $t$  ngày, tỷ lệ phần trăm động vật bị nhiễm bệnh được mô hình hóa bởi hàm  $p(t) = 8te^{-t/12}$  (đơn vị là phần trăm). Hỏi tỷ lệ này là lớn nhất khi nào?

**4.2.19.** Một hồ bị nhiễm khuẩn và được xử lý bằng một hóa chất kháng khuẩn. Sau  $t$  ngày, số lượng vi khuẩn trên mỗi mililit nước được mô hình hóa bởi hàm  $N(t) = 32(\frac{t}{4} - 2 \ln \frac{t}{5})$  với  $1 \leq t \leq 15$ . Hãy tìm số vi khuẩn nhiều nhất và ít nhất là bao nhiêu và xảy ra trong thời gian nào.

**4.2.20.** Cho hàm số

$$f(x) = \int_0^x \frac{(t-3)^3 e^t}{\sqrt{t^2+16}} dt, \quad x \in [0, 6].$$

Hỏi giá trị nhỏ nhất của  $f$  đạt được tại điểm nào?

## Xấp xỉ tuyến tính

**4.2.21.** Hãy tính gần đúng các giá trị sau bằng xấp xỉ tuyến tính.

- (a)  $(1,999)^4$ .  
 (b)  $\sin(1^\circ)$ .  
 (c)  $\sqrt[3]{1001}$   
 (d)  $1/4,002$ .  
 (e)  $\tan(44^\circ)$ .  
 (f)  $\sqrt{99,8}$ .

## Qui tắc l'Hôpital

**4.2.22.** Tìm các giới hạn sau

- (a)  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^x - x}{\ln x - x + 1}$ .
- (b)  $\lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{1}{x} - \frac{1}{e^x - 1} \right)$ .
- (c)  $\lim_{x \rightarrow \pi/2} (\tan x)^{2 \cos x}$ .
- (d)  $\lim_{x \rightarrow 0} x^{-100} e^{-1/x^2}$ .
- (e)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{2x} - 1}{x}$ .
- (f)  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln x}{x}$ .
- (g)  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2}{e^{-x}}$ .
- (h)  $\lim_{x \rightarrow \infty} \left( 1 + \frac{1}{x} \right)^x$ .
- (i)  $\lim_{x \rightarrow 1^+} \left( \frac{1}{\ln x} - \frac{1}{x-1} \right)$ .
- (j)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x - e^x + 1}{1 - e^{x^2}}$ .
- (k)  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{2017x^2 - 2017 + \sin(x-1)}{\tan(x-1)}$ .
- (l)  $\lim_{x \rightarrow 2017} (x - 2017)^3 e^{\sin\left(\frac{1}{2017-x}\right)}$ .
- (m)  $\lim_{x \rightarrow \infty} \left( \sqrt{x^2 + 3x + 2017} - \sqrt{x^2 + 3x} \right)$ .

**4.2.23.** Cho  $f(x) = x^{1/x}$ .

- (a) Tìm  $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x)$ .
- (b) Tìm  $f'(x)$ .
- (c) Số nào là lớn hơn,  $3^{1/3}$  hay  $\pi^{1/\pi}$ ?

**4.2.24.** Chứng tỏ nếu  $f$  có đạo hàm trên  $\mathbb{R}$  và  $f'(x) < 1$  với mọi  $x$  thì  $f$  có không quá một điểm bất động (tức là điểm  $x$  sao cho  $f(x) = x$ ).

**4.2.25.** Chứng tỏ  $(1+x)^n > 1+nx$  với mọi  $x > 0$  và với mọi  $n > 1$ .

# Chương 5

## Phép tính tích phân

### 5.1 Định nghĩa và tính chất của tích phân

#### 5.1.1 Bài toán diện tích

Khái niệm chiều dài, diện tích, thể tích đã hình thành từ lâu trong lịch sử, và được mỗi người tiếp nhận từ nhỏ, là một số đo độ lớn, độ chiếm chỗ của vật thể. Tuy vậy không dễ để trả lời câu hỏi: diện tích là gì? Với hình chữ nhật, diện tích của hình này được định nghĩa bởi tích của chiều dài và chiều rộng của nó. Diện tích của một tam giác chính là phân nửa của diện tích của một hình chữ nhật, bằng một nửa tích của độ dài cạnh đáy với chiều cao tương ứng. Diện tích của một đa giác được tìm ra bằng cách chia nhỏ đa giác này thành các tam giác, rồi sau đó cộng diện tích của các tam giác này lại.

Có thể cho rằng, tuy khái niệm diện tích chưa được làm rõ về mặt toán học, nhưng việc sử dụng khái niệm này trong thực tế không phải bằng cách định nghĩa khái niệm mà theo cách dùng: đưa ra một mẫu có độ đo đơn vị, và dùng nguyên tắc cộng tính để tính độ đo của các đối tượng khác.

Từ khoảng thế kỉ 17 xuất hiện nhu cầu chính xác hóa, làm rõ, và phát triển khái niệm diện tích. Vấn đề này gắn liền với vấn đề xây dựng một phép tính tổng tổng quát, gọi là tích phân. Dưới đây chúng ta thảo luận sơ lược một cách làm, được gọi là tích phân Riemann.

#### 5.1.2 Định nghĩa tích phân

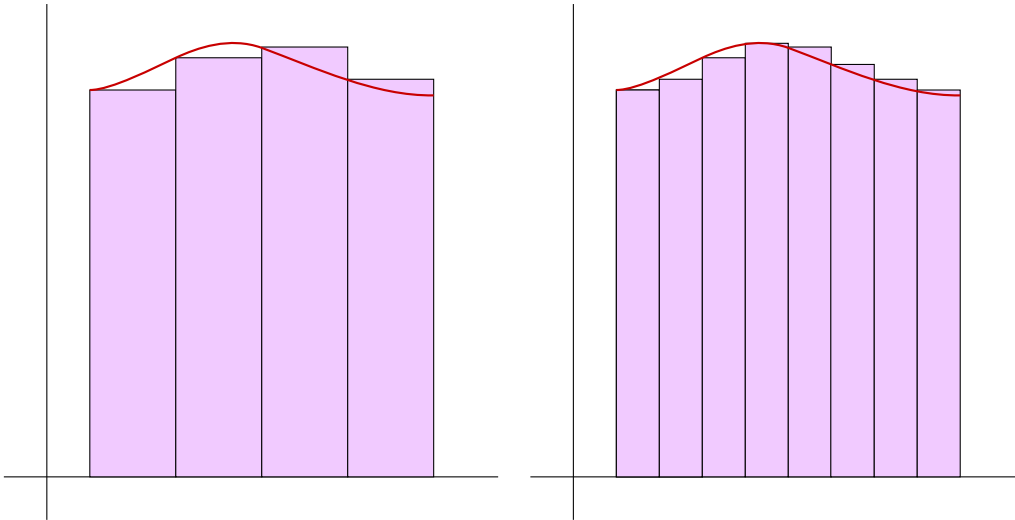
Sau đây là một cách giải thích trực quan. Giả sử hàm  $f$  là không âm, ta muốn tìm “diện tích” của miền bên dưới đồ thị của hàm  $f$  bên trên khoảng  $I = [a, b]$ . Ta sẽ xấp xỉ miền đó bằng những hình chữ nhật với đáy là một khoảng con của  $I$  và chiều cao là một giá trị của  $f$  trong khoảng con đó. Ta hy vọng rằng khi số hình chữ nhật tăng lên thì tổng diện tích của các hình chữ nhật có giá trị gần đúng với diện tích hình đang xét.

Cụ thể hơn như sau. Chia khoảng  $[a, b]$  thành các khoảng con bằng các điểm

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_n = b.$$

Một cách chia như vậy chẳng qua là một tập hợp gồm hữu hạn các điểm của khoảng  $[a, b]$  mà gồm cả  $a$  và  $b$ . Trên mỗi khoảng  $[x_{i-1}, x_i]$ ,  $1 \leq i \leq n$ , lấy một điểm  $x_i^*$  nào đó. Giá trị  $f(x_i^*)$  là một giá trị đại diện cho giá trị của  $f$  trên  $[x_{i-1}, x_i]$ . Đó cũng là chiều cao của hình chữ nhật với đáy  $[x_{i-1}, x_i]$  xấp xỉ miền dưới đồ thị của hàm  $f$  bên trên  $[x_{i-1}, x_i]$ . Tổng

$$\sum_{i=1}^n f(x_i^*)(x_i - x_{i-1})$$



Hình 5.1.1: Chia nhỏ hơn để xấp xỉ.

được gọi là một tổng Riemann. Đây là một xấp xỉ của “diện tích” của miền bên dưới đồ thị của  $f$  bên trên  $I$ .

Sau đây là một cách tiếp cận định lượng. Ta muốn tính tổng giá trị của hàm  $f$  trên khoảng  $I = [a, b]$ . Ta chia nhỏ  $I$  thành bằng khoảng con nhỏ hơn. Ta hy vọng rằng trên mỗi khoảng nhỏ hơn đó, giá trị của hàm  $f$  sẽ thay đổi ít hơn, và ta có thể xấp xỉ  $f$  bằng một hàm hằng với giá trị là một giá trị đại diện  $f(x_i^*)$ . Vậy tổng giá trị xấp xỉ bằng

$$\sum_{i=1}^n f(x_i^*)(x_i - x_{i-1})$$

Ta hy vọng rằng nếu ta chia càng nhỏ thì xấp xỉ càng tốt hơn, và khi qua giới hạn thì ta sẽ được giá trị đúng của tổng giá trị của  $f$ .

Giới hạn của tổng Riemann cần được hiểu một cách chính xác. Một cách trình bày, đó là nói rằng giới hạn đó là một số thực, mà tổng Riemann có thể gần số thực đó tùy ý, miễn là phép chia nhỏ là đủ mịn.

**Định nghĩa 5.1.1.** Nếu có một số thực  $L$  sao cho với mọi số thực  $\epsilon > 0$  có số thực  $\delta > 0$  sao cho với mọi cách chia

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_n = b$$

mà có chiều dài mỗi đoạn  $[x_{i-1}, x_i]$  đều nhỏ hơn  $\delta$  thì với mọi cách chọn số thực  $x_i^* \in [x_{i-1}, x_i]$ , xảy ra

$$\left| \sum_{i=1}^n f(x_i^*)(x_i - x_{i-1}) - L \right| < \epsilon$$

thì ta gọi  $L$  là **tích phân** của  $f$  trên  $[a, b]$ , kí hiệu bởi

$$\int_a^b f$$

hoặc

$$\int_a^b f(x) dx.$$

Ta cũng định nghĩa

$$\int_b^a f = - \int_a^b f.$$

Nếu tích phân tồn tại thì ta nói hàm *có tích phân* hay là *khả tích*.

Tích phân có hai ý nghĩa chính: đại diện cho *tổng giá trị của hàm*, và đại diện cho *diện tích phần bên trên trục x bên dưới đồ thị trừ diện tích phần bên dưới trục x bên trên đồ thị*.<sup>1</sup>

Kí hiệu  $dx$  phổ biến trong kí hiệu tích phân chủ yếu để chỉ tên của biến của hàm mà ta lấy tích phân, không có ý nghĩa độc lập.

### 5.1.3 Các tính chất của tích phân

Các tính chất sau có thể được dẫn xuất từ định nghĩa của tích phân. Chứng minh chặt chẽ thường được trình bày chi tiết trong các giáo trình Giải tích cho chuyên ngành như [TPTT02]. Tuy vậy một số tính chất có thể được giải thích và minh họa bằng định lượng hoặc hình học khá dễ dàng.

**Mệnh đề 5.1.2.** (a) *Tích phân nếu tồn tại thì là duy nhất.*

(b) *Nếu  $k$  là một hằng số thực thì và  $f$  có tích phân thì  $kf$  có tích phân và*

$$\int_a^b [kf(x)] dx = k \int_a^b f(x) dx.$$

(c) *Nếu  $f$  có tích phân và  $g$  có tích phân thì  $f + g$  có tích phân và*

$$\int_a^b [f(x) + g(x)] dx = \int_a^b f(x) dx + \int_a^b g(x) dx.$$

(d) *Nếu  $f$  có tích phân trên  $[a, b]$  và trên  $[b, c]$  thì  $f$  có tích phân trên  $[a, c]$  và*

$$\int_a^b f + \int_b^c f = \int_a^c f.$$

(e) *Nếu  $f \geq g$  trên  $[a, b]$  thì*

$$\int_a^b f \geq \int_a^b g.$$

(f)

$$\left| \int_a^b f \right| \leq \int_a^b |f|.$$

Định lý sau nói về một điều kiện đảm bảo tích phân tồn tại. Từ cách xây dựng tích phân, ta có thể thấy tính liên tục của hàm là thiết yếu trong tích phân, để xấp xỉ được tốt. Đại ý, tính liên tục khiến nếu giá trị của biến thay đổi “ít” thì giá trị của hàm thay đổi “ít”, khiến sự xấp xỉ có hiệu quả.

**Định lý 5.1.3 (hàm liên tục có tích phân).** *Nếu  $f$  liên tục trên  $[a, b]$  thì  $\int_a^b f$  tồn tại.*

Chứng minh mệnh đề này dùng tính đầy đủ của tập hợp số thực.

<sup>1</sup>Kí hiệu  $\int$  do Gottfried Leibniz đặt ra khi xây dựng phép tính vi tích phân vào thế kỉ 17. Nó đại diện cho chữ cái “s” trong chữ Latin “summa” (tổng).



## Bài tập

5.1.1. Sử dụng các tính chất của tích phân để chứng minh bất đẳng thức mà không cần tính tích phân.

$$\int_0^1 \sqrt{1+x^2} dx \leq \int_0^1 \sqrt{1+x} dx.$$

5.1.2. Sử dụng tính chất để ước lượng giá trị của tích phân  $\int_{-1}^1 \sqrt{1+x^4} dx$ .

5.1.3. Tìm chặn trên và chặn dưới cho

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{2x^4+3}}.$$

5.1.4. Giả sử  $f$  liên tục trên đoạn  $I$  và  $f(x) \geq 0$  trên  $I$ . Chứng minh rằng nếu  $\int_I f = 0$  thì  $f = 0$  trên  $I$ .

## 5.2 Định lý Cơ bản của phép tính vi tích phân

### 5.2.1 Nguyên hàm

Phép lấy nguyên hàm là phép toán ngược của phép lấy đạo hàm. Nếu  $f$  là đạo hàm của  $F$  thì ta nói  $F$  là một *nguyên hàm* của  $f$ .

**Ví dụ 5.2.1.** Vì  $x' = 1$  nên hàm  $F(x) = x$  là một nguyên hàm của hàm  $f = 1$ . Vì  $(x+1)' = 1$  nên  $G(x) = x+1$  là một nguyên hàm khác của  $f$ .

**Định lý 5.2.2.** Nếu  $F$  là một nguyên hàm của  $f$  trên khoảng  $(a, b)$  thì tất cả các nguyên hàm khác có dạng  $F + C$  trong đó  $C$  là một hằng số thực.

*Chứng minh.* Giả sử  $G$  là một nguyên hàm của  $f$  thì

$$(F - G)' = F' - G' = f - f = 0.$$

Do đó  $F - G$  là một hàm hằng  $C$  trên  $(a, b)$ . □

Nếu hàm  $f$  có nguyên hàm thì tích phân bất định của  $f$ , là tập hợp tất cả các nguyên hàm của  $f$ , được kí hiệu bởi

$$\int f$$

hay

$$\int f(x) dx.$$

Người ta có truyền thống viết tập hợp này ở dạng

$$\int f(x) dx = F(x) + C$$

trong đó  $F$  là một nguyên hàm của  $f$  và  $C$  đại diện cho một số thực bất kì. Tập này còn được gọi là *tích phân bất định* của hàm  $f$ .

**Ví dụ 5.2.3.** Nếu  $f(x) = k$  là một hàm hằng thì

$$\int k \, dx = kx + C.$$

**Ví dụ 5.2.4.** Nếu  $n \neq -1$  thì

$$\int x^n \, dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C.$$

**Ví dụ 5.2.5.** Ta có

$$(\ln x)' = \frac{1}{x},$$

và

$$[\ln(-x)]' = \frac{1}{-x}(-x)' = \frac{1}{x}.$$

Vậy với  $x \neq 0$  thì

$$(\ln |x|)' = \frac{1}{x}.$$

Ta được

$$\int x^{-1} \, dx = \int \frac{1}{x} \, dx = \ln |x| + C.$$

**Ví dụ 5.2.6.**

$$\int e^x \, dx = e^x + C.$$

Nếu  $k \neq 0$  thì

$$\int e^{kx} \, dx = \frac{1}{k}e^{kx} + C.$$

**Ví dụ 5.2.7.** Dễ kiểm tra được bằng cách lấy đạo hàm:

$$\int \tan x \, dx = -\ln |\cos x| + C.$$

$$\int \frac{1}{1+x^2} \, dx = \arctan x + C.$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \, dx = \arcsin x + C.$$

Dễ kiểm tra được tính chất cơ bản sau của nguyên hàm, được gọi là tính tuyến tính, từ tính tuyến tính của đạo hàm:

**Mệnh đề 5.2.8.** Nếu  $f$  và  $g$  có nguyên hàm thì  $f + g$  có nguyên hàm, và

$$\int (f + g) = \int f + \int g.$$

Nếu  $k$  là một hằng số thực thì  $k \cdot f$  có nguyên hàm và

$$\int k \cdot f = k \cdot \int f.$$

**Ví dụ 5.2.9.** Dùng tính chất tuyến tính của nguyên hàm ta có thể tính được nguyên hàm của nhiều hàm khác, đặc biệt dễ dàng với hàm đa thức.

$$\begin{aligned} \int (2x^3 - 4) \, dx &= \int 2x^3 \, dx + \int -4 \, dx = 2 \int x^3 \, dx + (-4x) + C \\ &= 2 \cdot \frac{1}{4}x^4 - 4x + C = \frac{1}{2}x^4 - 4x + C. \end{aligned}$$

### 5.2.2 Công thức Newton-Leibniz

Định lý sau cho một tính chất rất quan trọng về liên hệ giữa vi phân và tích phân.

**Định lý 5.2.10 (Định lý Cơ bản của Phép tính vi tích phân).** Nếu  $f$  là một hàm liên tục trên  $[a, b]$  thì hàm  $F$  cho bởi

$$F(x) = \int_a^x f(t) dt$$

là một nguyên hàm của  $f$  trên  $[a, b]$ .

Vậy **bất kì hàm liên tục nào cũng là đạo hàm của một hàm khác**. Đạo hàm của tích phân của một hàm thì cho lại hàm đó, tức hai phép toán vi phân và tích phân là ngược nhau.

*Chứng minh.* Theo định nghĩa đạo hàm

$$F'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{F(x+h) - F(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \int_x^{x+h} f(t) dt.$$

Tới đây ta biến đổi:

$$\frac{1}{h} \int_x^{x+h} f(t) dt - f(x) = \frac{1}{h} \int_x^{x+h} [f(t) - f(x)] dt.$$

Vì  $f$  là liên tục ở  $x$ , với  $|h| < \delta$  ta sẽ có  $|f(t) - f(x)| < \epsilon$  với  $t$  giữa  $x$  và  $x+h$ . Vì thế

$$\left| \frac{1}{h} \int_x^{x+h} [f(t) - f(x)] dt \right| \leq \frac{1}{h} \int_x^{x+h} |f(t) - f(x)| dt \leq \frac{1}{h} h \epsilon = \epsilon.$$

Vậy

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \int_x^{x+h} f(t) dt = f(x).$$

Do đó  $F'(x) = f(x)$ . □

Công thức này cũng có thể được giải thích bằng trực quan hình học. Giả sử  $f \geq 0$ . Khi đó  $F(x) = \int_a^x f(t) dt$  là diện tích bên dưới đồ thị của  $f$  từ  $a$  tới  $x$ . Khi  $h$  "nhỏ" thì ta thấy phần diện tích từ  $x$  tới  $x+h$  xấp xỉ bằng chiều cao  $f(x)$  nhân với chiều rộng  $h$ , tức là  $F(x+h) - F(x) \approx f(x) \cdot h$ , do đó  $F'(x) \approx \frac{F(x+h) - F(x)}{h} \approx f(x)$ .

**Ví dụ 5.2.11.** Một ví dụ hàm được định nghĩa bằng tích phân là

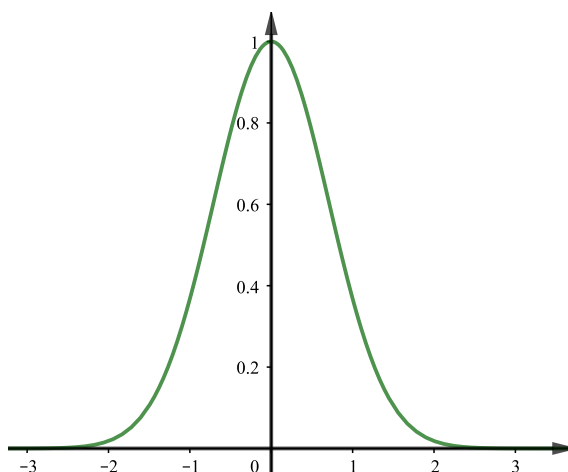
$$\operatorname{erf}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-t^2} dt,$$

được gọi là hàm lỗi hay hàm sai số.<sup>2</sup>

Đồ thị của hàm  $e^{-x^2}$  thường được gọi là đường hình chuông hay đường cong Gauss. Giá trị của  $\operatorname{erf}(x)$  bằng diện tích bên dưới đường cong từ 0 tới  $x$ . Hàm này được dùng nhiều trong môn Xác suất và Thống kê.

Định lý sau cho một công cụ chính để tính tích phân:

<sup>2</sup>error function trong tiếng Anh



Hình 5.2.1: Đường hình chuông.

**Định lý 5.2.12 (Công thức Newton-Leibniz).** Nếu  $f$  liên tục trên đoạn  $[a, b]$  và  $F$  là một nguyên hàm của  $f$  thì

$$\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a) = F(x) \Big|_a^b.$$

Theo công thức Newton–Leibniz, ta có thể tính một tích phân của một hàm nếu tìm được một nguyên hàm.

*Chứng minh.* Theo Định lý cơ bản của Phép tính vi tích phân,

$$F(x) = \int_a^x f(t) dt$$

là một nguyên hàm của  $f$ . Ta có ngay  $\int_a^b f(t) dt = F(b) - F(a)$  vì  $F(a) = \int_a^a f(t) dt = 0$ .

Giả sử  $G$  là một nguyên hàm khác của  $f$ . Khi đó  $G = F + C$  với  $C$  là một hằng số thực. Khi đó

$$G(b) - G(a) = F(b) + C - (F(a) + C) = F(b) - F(a) = \int_a^b f(t) dt.$$

□

Có một cách giải thích bằng xấp xỉ như sau. Vì

$$F(x_i) - F(x_{i-1}) \approx F'(x_{i-1})(x_i - x_{i-1}) = f(x_{i-1})\Delta x$$

cho nên với tổng Riemann thì

$$\sum_{i=1}^n f(x_{i-1})\Delta x \approx \sum_{i=1}^n (F(x_i) - F(x_{i-1})) = F(x_n) - F(x_0) = F(b) - F(a).$$

**Ví dụ 5.2.13.** Ta tính dễ dàng

$$\int_0^1 x dx = \frac{1}{2}x^2 \Big|_0^1 = \frac{1}{2}.$$

## Bài tập

### 5.2.1. Tính

(a)  $\int_1^2 \left( \sqrt{x} - \frac{3}{\sqrt[3]{x^5}} + \frac{5}{x} \right) dx.$

(e)  $\int_0^2 f(x) dx$  với

(b)  $\int_{-2}^3 |x^2 - 1| dx.$

$$f(x) = \begin{cases} x^4 & \text{nếu } 0 \leq x < 1, \\ x^5, & \text{nếu } 1 \leq x \leq 2. \end{cases}$$

(c)  $\int_{-1}^2 |x - x^2| dx.$

(f)  $\int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx$  với

(d)  $\int_{-1}^2 (x - 2|x|) dx.$

$$f(x) = \begin{cases} x, & \text{nếu } -\pi \leq x \leq 0, \\ \sin x, & \text{nếu } 0 < x \leq \pi. \end{cases}$$

### 5.2.2. Sử dụng Định lý Cơ bản của Phép tính vi tích phân để tìm đạo hàm của hàm số sau.

(a)  $g(x) = \int_1^x \frac{1}{t^3 + 1} dt.$

(b)  $h(x) = \int_1^{\sqrt{x}} \frac{z^2}{z^4 + 1} dz.$

### 5.2.3. Tính

(a)  $\frac{d}{dx} \int_0^x (1 + t^2)^4 dt.$

(d)  $\frac{d}{dt} \int_0^{1/t} \frac{dx}{1+x^2}.$

(b)  $\frac{d}{dx} \int_x^1 \ln z dz.$

(c)  $\frac{d}{dt} \int_0^t \frac{dx}{1+x^2}.$

(e)  $\frac{d}{dx} \int_x^{2x} s^2 ds.$

### 5.2.4. Cho $f(x) = \int_x^{x^2} \ln(t^2 + 1) dt$ . Tìm $f'(0)$ .

### 5.2.5. Hãy chứng minh công thức đúng bằng cách lấy đạo hàm.

(a)  $\int \frac{1}{x^2 \sqrt{1+x^2}} dx = -\frac{\sqrt{1+x^2}}{x} + C,$

(b)  $\int \frac{x}{\sqrt{a+bx}} dx = \frac{2}{3b^2} (bx - 2a) \sqrt{a+bx} + C.$

### 5.2.6. Tính

$$\int_{\int_0^1 x dx}^{\int_1^2 x dx} \left( \int_0^2 x dx \right) dx.$$

### 5.2.7. Tích phân $\int_0^1 x^n dx$ , $n > 0$ , thay đổi như thế nào khi $n$ thay đổi? Hãy vẽ phác họa đồ thị của hàm $y = x^n$ với một số giá trị của $n$ để minh họa.

### 5.2.8. Nước chảy vào một bồn rỗng với vận tốc $3000 + 20t$ lít mỗi giờ, với $t = 0$ là thời điểm ban đầu. Hỏi lượng nước trong bồn sau 5 giờ là bao nhiêu?

### 5.2.9. Lượng nước tiêu thụ của một thành phố được mô hình hóa bằng hàm $r(t)$ , trong đó $t$ là thời gian kể từ nửa đêm, với $r(t) = 100 + 70t - 2t^2$ (nghìn lít mỗi giờ). Hãy ước lượng tổng lượng nước tiêu thụ trong một ngày đêm.

### 5.2.10. Một virus cúm đang phát tán với tốc độ $\frac{dn}{dt} = 5 + 6\sqrt{t}$ người một ngày, ở đây $n$ là số ngàn người và $t$ là thời gian (ngày). Bao nhiêu người sẽ bị nhiễm bệnh trong khoảng từ ngày tám tới ngày mười một?

## 5.3 Một số phương pháp biến đổi tích phân

### 5.3.1 Phép đổi biến trong tích phân

**Định lý 5.3.1.** Giả sử  $u = g(x)$  là một hàm khả vi liên tục với tập giá trị chứa trong khoảng  $I$  và  $f$  liên tục trên  $I$ . Khi đó trên  $I$  thì

$$\int f(g(x))g'(x) dx = \int f(u) du.$$

*Chứng minh.* Vì  $f$  liên tục trên  $I$  nó có nguyên hàm  $F$ , do đó  $\int f(u) du = F(u) + C$ . Mặt khác

$$(F \circ g)'(x) = F'(g(x))g'(x) = f(g(x))g'(x).$$

Vậy  $F \circ g$  là một nguyên hàm của hàm  $x \mapsto f(g(x))g'(x)$ , do đó

$$\int f(g(x))g'(x) dx = F(g(x)) + D = F(u) + D = \int f(u) du.$$

□

**Định lý 5.3.2.** Giả sử  $u = g(x)$  khả vi liên tục trên một khoảng chứa đoạn  $[a, b]$  và  $f$  liên tục trên một khoảng chứa tập giá trị của  $g$ , khi đó

$$\int_a^b f(g(x))g'(x) dx = \int_{g(a)}^{g(b)} f(u) du.$$

Việc thay  $g(x)$  bởi  $u$  được gọi là một **phép thế**. Nếu có thể tính ngược lại  $x$  theo  $u$ , nói cách khác  $g$  có hàm ngược thì khi đó ta nói  $g$  là một **phép đổi biến**.

*Chứng minh.* Cho  $F$  là một nguyên hàm của  $f$ . Ta có  $F(g(x))$  là một nguyên hàm của  $f(g(x))g'(x)$ . Vậy theo Định lý cơ bản của Vi tích phân thì

$$\int_a^b f(g(x))g'(x) dx = F(g(b)) - F(g(a)) = F(u) \Big|_{u=g(a)}^{u=g(b)} = \int_{g(a)}^{g(b)} f(u) du.$$

□

**Ví dụ 5.3.3.** Tính  $\int_0^1 \sqrt{1-x^2} dx$ .

Người ta thường viết như sau. Đặt  $x = \sin t$  thì  $dx = \cos t dt$ ,  $x = 0$  tương ứng  $t = 0$ ,  $x = 1$  tương ứng  $t = \pi/2$ , và

$$\begin{aligned} \int_0^1 \sqrt{1-x^2} dx &= \int_0^{\pi/2} \sqrt{1-\sin^2 t} \cos t dt = \int_0^{\pi/2} \cos^2 t dt \\ &= \int_0^{\pi/2} \frac{1}{2}(1 + \cos 2t) dt = \left( \frac{1}{2}t + \frac{1}{4} \sin 2t \right) \Big|_{t=0}^{t=\pi/2} = \frac{\pi}{4}. \end{aligned}$$

**Ví dụ 5.3.4.** Tính  $\int 2x \sin(x^2 + 3) dx$ .

Thế  $z = x^2 + 3$  thì  $dz = d(x^2 + 3) = 2x dx$  nên  $\int 2x \sin(x^2 + 3) dx = \int \sin z dz = -\cos z + C$ . Vậy

$$\int 2x \sin(x^2 + 3) dx = -\cos(x^2 + 3) + C.$$

**Ví dụ 5.3.5.** Tính  $\int_0^1 \frac{x}{1+x^2} dx$ .

Thế  $u = G(x) = 1 + x^2$ . Vì  $du = 2x dx$  nên

$$\int \underbrace{\frac{1}{1+x^2}}_{\frac{1}{u}} \underbrace{x dx}_{\frac{1}{2} du} = \frac{1}{2} \int \frac{1}{u} du.$$

Nếu  $x$  chạy giữa  $x = 0$  và  $x = 1$ , thì  $u$  chạy giữa  $u = 1 + 0^2 = 1$  và  $u = 1 + 1^2 = 2$ ,

$$\int_0^1 \frac{x}{1+x^2} dx = \frac{1}{2} \int_1^2 \frac{1}{u} du = \frac{1}{2} \ln u \Big|_1^2 = \frac{1}{2} \ln 2.$$

Dưới đây là một ứng dụng của công thức đổi biến.

**Mệnh đề 5.3.6 (Tính đối xứng).** Giả sử rằng  $f$  liên tục trên  $[-a, a]$ .

(a) Nếu  $f$  là hàm chẵn, tức  $\forall x, f(-x) = f(x)$ , thì  $\int_{-a}^a f(x) dx = 2 \int_0^a f(x) dx$ .

(b) Nếu  $f$  là hàm lẻ, tức  $\forall x, f(-x) = -f(x)$  thì  $\int_{-a}^a f(x) dx = 0$ .

Giải thích số lượng, mệnh đề trên khá hiển nhiên, nếu hàm có tính đối xứng chẵn thì để tính tổng của hàm chỉ cần tính tổng trên nửa khoảng xác định rồi nhân đôi, còn nếu hàm có tính đối xứng lẻ thì các giá trị sẽ triệt tiêu đôi một, nên tổng bằng 0.

Giải thích hình học, mệnh đề nói rằng vì tính đối xứng của hàm  $f$  nên với trường hợp  $f$  dương và chẵn thì diện tích dưới đồ thị của  $f$  từ  $-a$  đến 0 đúng bằng diện tích từ 0 tới  $a$ , còn với trường hợp  $f$  lẻ thì tích phân bằng 0 bởi vì diện tích bên trên trục  $x$  đúng bằng diện tích bên dưới trục  $x$ .

*Chứng minh.* Chúng ta chia tích phân thành hai:

$$\int_{-a}^a f(x) dx = \int_{-a}^0 f(x) dx + \int_0^a f(x) dx.$$

Lấy phép đổi biến  $u = -x$ :

$$\int_{-a}^0 f(x) dx = \int_a^0 f(-u)(-du) = \int_0^a f(-u) du$$

do đó

$$\int_{-a}^a f(x) dx = \int_0^a f(-u) du + \int_0^a f(x) dx.$$

Nếu  $f$  là hàm chẵn thì  $f(-u) = f(u)$  nên

$$\int_{-a}^a f(x) dx = \int_0^a f(u) du + \int_0^a f(x) dx = 2 \int_0^a f(x) dx.$$

Nếu  $f$  là hàm lẻ thì  $f(-u) = -f(u)$  nên

$$\int_{-a}^a f(x) dx = - \int_0^a f(u) du + \int_0^a f(x) dx = 0.$$

□

### 5.3.2 Tích phân từng phần

Quy tắc đạo hàm tích nói rằng nếu  $f$  và  $g$  là các hàm khả vi thì

$$\frac{d}{dx}[f(x)g(x)] = f(x)g'(x) + g(x)f'(x),$$

nghĩa là  $f'g$  là một nguyên hàm của  $f'g + fg'$ . Người ta thường nói rằng lấy tích phân hai vế thì được

$$\int [f(x)g'(x) + g(x)f'(x)]dx = f(x)g(x)$$

hay

$$\int f(x)g'(x)dx + \int g(x)f'(x)dx = f(x)g(x).$$

Vậy

$$\boxed{\int f(x)g'(x)dx = f(x)g(x) - \int g(x)f'(x)dx.} \quad (5.3.1)$$

Công thức (5.3.1) được gọi là **công thức tích phân từng phần**.

Đặt  $u = f(x)$  và  $v = g(x)$  thì  $du = f'(x)dx$  và  $dv = g'(x)dx$ , do đó công thức tích phân từng phần có dạng ngắn gọn hơn, thường được dùng:

$$\boxed{\int u dv = uv - \int v du.} \quad (5.3.2)$$

Áp dụng lý luận dẫn tới công thức (5.3.1) cho tích phân từ  $a$  đến  $b$ , với giả thiết  $f'$  và  $g'$  liên tục, theo Định lý cơ bản của Vi tích phân:

$$\int_a^b [f(x)g'(x) + g(x)f'(x)]dx = f(x)g(x)|_a^b$$

hay

$$\boxed{\int_a^b f(x)g'(x)dx = f(x)g(x)|_a^b - \int_a^b g(x)f'(x)dx.} \quad (5.3.3)$$

**Ví dụ 5.3.7.** Tính  $\int x \sin x dx$ .

Chọn  $f(x) = x$  và  $g'(x) = \sin x$ . Khi đó,  $f'(x) = 1$  và  $g(x) = -\cos x$ . Áp dụng công thức tích phân từng phần, ta có

$$\begin{aligned} \int x \sin x dx &= f(x)g(x) - \int g(x)f'(x)dx \\ &= x(-\cos x) + \int \cos x dx \\ &= -x \cos x + \int \cos x dx = -x \cos x + \sin x + C. \end{aligned}$$

Để nhanh gọn hơn ta thường viết một cách hình thức theo một giải thuật như sau. Đặt

$$u = x, dv = \sin x$$

thì

$$du = dx, v = -\cos x$$



suy ra

$$\begin{aligned}\int x \sin x dx &= \int u dv = uv - \int v du = x(-\cos x) - \int (-\cos x) dx \\ &= -x \cos x + \int \cos x dx = -x \cos x + \sin x + C.\end{aligned}$$

**Ví dụ 5.3.8.** Tính  $\int \ln x dx$ .

Đặt

$$u = \ln x, dv = dx$$

thì

$$du = \frac{1}{x} dx, v = x,$$

áp dụng tích phân từng phần, ta có

$$\begin{aligned}\int \ln x dx &= x \ln x - \int x \frac{dx}{x} \\ &= x \ln x - \int dx \\ &= x \ln x - x + C.\end{aligned}$$

**Ví dụ 5.3.9.** Tính  $\int_0^1 \arctan x dx$ .

Đặt

$$u = \arctan x, dv = dx$$

thì

$$du = \frac{dx}{1+x^2}, v = x.$$

Suy ra

$$\begin{aligned}\int_0^1 \arctan x dx &= x \arctan x \Big|_0^1 - \int_0^1 \frac{x}{1+x^2} dx \\ &= \frac{\pi}{4} - \int_0^1 \frac{x}{1+x^2} dx\end{aligned}$$

Dùng phép đổi biến  $t = 1 + x^2$  thì  $dt = 2x dx$ , nên  $x dx = \frac{1}{2} dt$ . Khi  $x = 0$  thì  $t = 1$ , khi  $x = 1$  thì  $t = 2$ . Do đó

$$\begin{aligned}\int_0^1 \frac{x}{1+x^2} dx &= \frac{1}{2} \int_1^2 \frac{dt}{t} = \frac{1}{2} \ln |t| \Big|_1^2 \\ &= \frac{1}{2} (\ln 2 - \ln 1) = \frac{1}{2} \ln 2\end{aligned}$$

Vậy

$$\int_0^1 \arctan x dx = \frac{\pi}{4} - \int_0^1 \frac{x}{1+x^2} dx = \frac{\pi}{4} - \frac{\ln 2}{2}.$$

### 5.3.3 Một số phương pháp tính tích phân cho các hàm đặc biệt

#### Tích phân các hàm lượng giác

**Ví dụ 5.3.10.** Tính  $\int \cos^3 x dx$ .

Ta tính tích phân bằng cách đổi biến  $u = \sin x$ ,  $du = \cos x dx$ :

$$\begin{aligned}\int \cos^3 x dx &= \int \cos^2 x \cos x dx = \int (1 - \sin^2 x) \cos x dx \\ &= \int (1 - u^2) du = u - \frac{1}{3}u^3 + C \\ &= \sin x - \frac{1}{3} \sin^3 x + C.\end{aligned}$$

**Ví dụ 5.3.11.** Tính  $\int \sin^5 x \cos^2 x dx$ .

Đổi biến  $u = \cos x$ , ta có  $du = -\sin x dx$  và

$$\begin{aligned}\int \sin^5 x \cos^2 x dx &= \int (\sin^2 x)^2 \cos^2 x \sin x dx \\ &= \int (1 - \cos^2 x)^2 \cos^2 x \sin x dx \\ &= \int (1 - u^2)^2 u^2 (-du) = -\int (u^2 - 2u^4 + u^6) du \\ &= -\left(\frac{u^3}{3} - 2\frac{u^5}{5} + \frac{u^7}{7}\right) + C \\ &= -\frac{1}{3} \cos^3 x + \frac{2}{5} \cos^5 x - \frac{1}{7} \cos^7 x + C.\end{aligned}$$

**Ví dụ 5.3.12.** Tính  $\int \sin^4 x dx$ .

$$\begin{aligned}\int \sin^4 x dx &= \int (\sin^2 x)^2 dx \\ &= \int \left(\frac{1 - \cos 2x}{2}\right)^2 dx \\ &= \frac{1}{4} \int (1 - 2 \cos 2x + \cos^2 2x) dx \\ &= \frac{1}{4} \int \left(\frac{3}{2} - 2 \cos 2x + \frac{1}{2} \cos 4x\right) dx = \frac{1}{4} \left(\frac{3}{2}x - \sin 2x + \frac{1}{8} \sin 4x\right) + C.\end{aligned}$$

Khi tính tích phân các hàm lượng giác ta có thể dùng các hệ thức lượng giác sau:

$$\sin A \cos B = \frac{1}{2}[\sin(A - B) + \sin(A + B)]$$

$$\sin A \sin B = \frac{1}{2}[\cos(A - B) - \cos(A + B)]$$

$$\cos A \cos B = \frac{1}{2}[\cos(A - B) + \cos(A + B)]$$

## Các phép đổi biến lượng giác

Một số phép đổi biến lượng giác, với  $\sec = \frac{1}{\cos}$ :

Biểu thức	Phép đổi biến	Hệ thức
$\sqrt{a^2 - x^2}$	$x = a \sin \theta$	$1 - \sin^2 \theta = \cos^2 \theta$
$\sqrt{a^2 + x^2}$	$x = a \tan \theta$	$1 + \tan^2 \theta = \sec^2 \theta$
$\sqrt{x^2 - a^2}$	$x = a \sec \theta$	$\sec^2 \theta - 1 = \tan^2 \theta$

**Ví dụ 5.3.13.** Tính  $\int \sqrt{9 - x^2} dx$ .

Đặt  $x = 3 \sin \theta$ . Ta chỉ chọn miền xác định của biến  $\theta$  sao cho miền xác định của biến  $x$  được phủ, tức là sao cho hàm đổi biến là toàn ánh, nhằm mục đích công thức thu được là đúng trên miền xác định ban đầu của biến  $x$ . Cách chọn thế nào cho tiện thì

sẽ rõ hơn ở phần tính toán ngay phía sau: Với  $-\pi/2 \leq \theta \leq \pi/2$  thì  $\cos \theta \geq 0$ , nhờ đó  $\sqrt{9 - 9 \sin^2 \theta} = 3 \cos \theta$ , và

$$\begin{aligned} \int \sqrt{9 - x^2} dx &= \int 3 \cos \theta \cdot 3 \cos \theta d\theta = 9 \int \cos^2 \theta d\theta = 9 \int \frac{1 + \cos(2\theta)}{2} d\theta \\ &= \frac{9}{2} \theta + \frac{9}{2} \sin(2\theta) + C = \frac{9}{2} \theta + \frac{9}{2} \sin \theta \cos \theta + C = \frac{9}{2} \arcsin \frac{x}{3} + \frac{1}{2} x \sqrt{9 - x^2} + C. \end{aligned}$$

### Tích phân hàm hữu tỷ

Ta minh họa phương pháp qua một số ví dụ sau.

**Ví dụ 5.3.14.** Tính  $\int \frac{x^3+x}{x-1} dx$ .

Ta có

$$\begin{aligned} \int \frac{x^3+x}{x-1} dx &= \int \left(x^2 + x + 2 + \frac{2}{x-1}\right) dx \\ &= \frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} + 2x + 2 \ln|x-1| + C. \end{aligned}$$

**Ví dụ 5.3.15.** Tính  $\int \frac{x^2+2x-1}{2x^3+3x^2-2x} dx$ .

Ta có thể phân tích hàm dưới dấu tích phân thành tổng sau

$$\frac{x^2+2x-1}{x(2x-1)(x+2)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{2x-1} + \frac{C}{x+2}.$$

Giải đồng nhất thức ta được  $A = \frac{1}{2}$ ,  $B = \frac{1}{5}$ , và  $C = -\frac{1}{10}$ , và vì vậy

$$\begin{aligned} \int \frac{x^2+2x-1}{2x^3+3x^2-2x} dx &= \int \left( \frac{1}{2} \frac{1}{x} + \frac{1}{5} \frac{1}{2x-1} - \frac{1}{10} \frac{1}{x+2} \right) dx \\ &= \frac{1}{2} \ln|x| + \frac{1}{10} \ln|2x-1| - \frac{1}{10} \ln|x+2| + K. \end{aligned}$$

**Ví dụ 5.3.16.** Tính  $\int \frac{2x^2-x+4}{x^3+4x} dx$ .

$$\begin{aligned} \int \frac{2x^2-x+4}{x^3+4x} dx &= \int \left( \frac{1}{x} + \frac{x-1}{x^2+4} \right) dx \\ &= \int \frac{1}{x} dx + \int \frac{x}{x^2+4} dx - \int \frac{1}{x^2+4} dx \\ &= \ln|x| + \frac{1}{2} \ln(x^2+4) - \frac{1}{2} \tan^{-1}(x/2) + K. \end{aligned}$$

**Ví dụ 5.3.17.** Tính  $\int \frac{4x^2-3x+2}{4x^2-4x+3} dx$ .

Ta chia đa thức và được

$$\frac{4x^2-3x+2}{4x^2-4x+3} = 1 + \frac{x-1}{4x^2-4x+3}.$$

Chú ý rằng

$$4x^2-4x+3 = (2x-1)^2+2.$$

Ta đổi biến  $u = 2x - 1$ . Thì  $du = 2dx$  và  $x = \frac{1}{2}(u + 1)$ , vì vậy

$$\begin{aligned} \int \frac{4x^2 - 3x + 2}{4x^2 - 4x + 3} dx &= \int \left( 1 + \frac{x - 1}{4x^2 - 4x + 3} \right) dx \\ &= x + \frac{1}{2} \int \frac{\frac{1}{2}(u + 1) - 1}{u^2 + 2} du = x + \frac{1}{4} \int \frac{u - 1}{u^2 + 2} du \\ &= x + \frac{1}{4} \int \frac{u}{u^2 + 2} du - \frac{1}{4} \int \frac{1}{u^2 + 2} du \\ &= x + \frac{1}{8} \ln(u^2 + 2) - \frac{1}{4} \frac{1}{\sqrt{2}} \arctan \frac{u}{\sqrt{2}} + C \\ &= x + \frac{1}{8} \ln(4x^2 - 4x + 3) - \frac{1}{4\sqrt{2}} \arctan \frac{2x - 1}{\sqrt{2}} + C. \end{aligned}$$

### 5.3.4 Sự tồn tại công thức cho tích phân

Theo Định lý cơ bản của Vi tích phân, mọi hàm liên tục đều có nguyên hàm cho bởi một tích phân, do đó câu hỏi tính tích phân của một hàm có ý nghĩa thực sự là tìm công thức tường minh cho tích phân đó. “Công thức tường minh” ở đây có ý nghĩa chính xác là công thức của một hàm sơ cấp. Tuy vậy sau này người ta biết có những hàm liên tục mà nguyên hàm không phải là hàm sơ cấp, nên không có công thức tường minh.

**Ví dụ 5.3.18.** Hàm  $f(x) = e^{x^2}$  có một nguyên hàm  $F$ , nhưng người ta có thể chứng minh được rằng  $F$  không là một hàm sơ cấp.

Các tích phân sau cũng được biết không phải là hàm sơ cấp:

$$\int \frac{e^x}{x} dx \quad \int \sin(x^2) dx \quad \int \cos(e^x) dx$$

$$\int \sqrt{x^3 + 1} dx \quad \int \frac{1}{\ln x} dx \quad \int \frac{\sin x}{x} dx$$

Có thể nói việc tìm công thức tường minh nói chung là một bài toán khó, mặc dù người ta đã nghiên cứu rất nhiều từ lâu. Trong nhiều trường hợp công thức không có, hoặc nếu có thì quá phức tạp để có ích. Người ta có thể dùng các phương pháp khác để khảo sát tích phân, như phân tích thành chuỗi, tính toán xấp xỉ, biến đổi để khảo sát các tính chất, mà không cần công thức tường minh.

### Dùng các phần mềm tính toán kí hiệu để tính tích phân

Chúng ta thấy rằng việc tính toán tích phân nói chung là khó và mỗi loại tích phân cần những phương pháp riêng. Người ta đã nghiên cứu nhiều và đưa ra những phương pháp chuyên biệt để tính tích phân, cũng như soạn những bản tích phân rất lớn. Rõ ràng ít người có thể nắm hết những phương pháp như vậy, cũng như việc sử dụng chúng hay tìm trong bảng sẽ mất nhiều thời gian và công sức. Các việc này thích hợp để lập trình cho máy tính thực hiện.

Các phần mềm tính toán kí hiệu (symbolic computation), còn gọi là các hệ Đại số máy tính (Computer Algebra System) thường có cài đặt các thuật toán tính tích phân ở mức độ khác nhau. Một số trong đó cài đặt một thuật toán phức tạp gọi là thuật toán Risch, cho phép xác định một hàm cho trước có nguyên hàm sơ cấp hay không, và nếu có thì cho công thức của hàm đó.

**Ví dụ 5.3.19.** Tính  $\int \sqrt{\tan x} dx$ .

Phần mềm Maxima [Maxi], cài đặt một phần thuật toán Risch, cho kết quả:

$$-\frac{\ln(\tan x + \sqrt{2}\sqrt{\tan x + 1})}{2^{\frac{3}{2}}} + \frac{\ln(\tan x - \sqrt{2}\sqrt{\tan x + 1})}{2^{\frac{3}{2}}} + \frac{\arctan(\sqrt{2}\sqrt{\tan x + 1})}{\sqrt{2}} + \frac{\arctan(\sqrt{2}\sqrt{\tan x - 1})}{\sqrt{2}}.$$

Có một số phần mềm tính toán kí hiệu khác có thể tính được tích phân, như GeoGebra [GeoG], Wolfram Alpha [Wolf], Maple, Matlab, SageMath (có thể truy cập gói cài toàn bộ thuật toán Risch).

### 5.3.5 Tính tích phân bằng phương pháp số

Trong nhiều trường hợp việc tính đúng tích phân là không thể, như đã thấy ở phần trước. Có khi tính đúng cũng không cần thiết. Ngoài ra có những trường hợp hàm số được xác định từ thực nghiệm thông qua các thiết bị đọc hay thu thập dữ liệu (một bảng số liệu hay một đường cong chẳng hạn) và có thể không có công thức cho hàm. Khi đó việc tính xấp xỉ tích phân của hàm là mối quan tâm chính.

Phương pháp cơ bản là dùng một tổng Riemann với cách chia khoảng thích hợp và cách chọn điểm đại diện thích hợp.

Dưới đây ta xét phương pháp xấp xỉ dựa trên cách chia đều miền xác định.

Cho hàm  $f$  xác định trên đoạn  $[a, b]$ . Chia  $[a, b]$  thành  $n$  khoảng bằng nhau mỗi khoảng có chiều dài  $\Delta x = \frac{b-a}{n}$ . Đặt  $x_i = a + i\Delta x$ ,  $0 \leq i \leq n$ .

Lấy tổng Riemann với điểm đại diện là trung điểm (điểm giữa) của khoảng con, ta được **Qui tắc điểm giữa**:

$$\int_a^b f(x) dx \approx M_n = [f(x_1^*) + \dots + f(x_n^*)]\Delta x$$

với

$$x_i^* = \frac{1}{2}(x_{i-1} + x_i).$$

**Ví dụ 5.3.20.** Sử dụng Qui tắc điểm giữa với  $n = 5$  để xấp xỉ  $\int_1^2 \frac{1}{x} dx$ .

Các điểm biên của năm đoạn con là 1; 1,2; 1,4; 1,6; 1,8 và 2, vì thế các trung điểm là 1,1; 1,3; 1,5; 1,7 và 1,9. Chiều rộng của các đoạn con là  $\Delta x = (2 - 1)/5 = \frac{1}{5}$ , vì thế theo Qui tắc điểm giữa:

$$\begin{aligned} \int_1^2 \frac{1}{x} dx &\approx \Delta x [f(1,1) + f(1,3) + f(1,5) + f(1,7) + f(1,9)] \\ &= \frac{1}{5} \left( \frac{1}{1,1} + \frac{1}{1,3} + \frac{1}{1,5} + \frac{1}{1,7} + \frac{1}{1,9} \right) \\ &\approx 0,691908. \end{aligned}$$

Phương pháp hình thang thay vì xấp xỉ bằng hình chữ nhật lại dùng xấp xỉ bằng hình thang. Lấy diện tích hình thang trên khoảng  $[x_{i-1}, x_i]$  với chiều cao tại  $x_{i-1}$  là  $f(x_{i-1})$  và chiều cao tại  $x_i$  là  $f(x_i)$ , ta được **Qui tắc hình thang**:

$$\int_a^b f(x) dx \approx T_n = \left[ \frac{1}{2}f(x_1) + f(x_2) + f(x_3) + \dots + f(x_{n-1}) + \frac{1}{2}f(x_n) \right] \Delta x.$$

Phương pháp Simpson thay vì xấp xỉ bằng hình chữ nhật lại dùng xấp xỉ bằng hình parabol. Xấp xỉ đồ thị bên trên đoạn  $[x_{i-2}, x_{i-1}, x_i]$  bởi một parabol đi qua các điểm

$(x_{i-2}, f(x_{i-2})), (x_{i-1}, f(x_{i-1})), (x_i, f(x_i))$ , rồi tính diện tích dưới parabol này. Cần số điểm chia là số lẻ, tức số khoảng con là số chẵn, tức  $n$  là một số chẵn. Ta được **Quy tắc Simpson**:

$$\int_a^b f(x) dx \approx S_n = \frac{1}{3}[f(x_0) + 4f(x_1) + 2f(x_2) + 4f(x_3) + 2f(x_4) + \dots + 2f(x_{n-2}) + 4f(x_{n-1}) + f(x_n)]\Delta x.$$

### 5.3.6 Tích phân suy rộng

Ta có thể có những câu hỏi đơn giản như diện tích bên dưới đồ thị của hàm  $y = \frac{1}{x}$  trên  $(1, \infty)$  là bao nhiêu? Để trả lời những câu hỏi như vậy người ta xây dựng khái niệm tích phân suy rộng.

**Định nghĩa 5.3.21.** Ta định nghĩa

(a)

$$\int_a^\infty f(x) dx = \lim_{t \rightarrow \infty} \int_a^t f(x) dx$$

(b)

$$\int_{-\infty}^a f(x) dx = \lim_{t \rightarrow -\infty} \int_t^a f(x) dx$$

(c)

$$\int_{-\infty}^\infty f(x) dx = \int_{-\infty}^a f(x) dx + \int_a^\infty f(x) dx$$

(d) Nếu hàm  $f$  xác định trên  $(a, b]$  thì ta định nghĩa

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{t \rightarrow a^+} \int_t^b f(x) dx$$

(e) Nếu hàm  $f$  xác định trên  $[a, b)$  thì ta định nghĩa

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{t \rightarrow b^-} \int_a^t f(x) dx$$

Ta nói một tích phân suy rộng là hội tụ nếu giới hạn tồn tại (là một số thực), và phân kỳ nếu giới hạn không tồn tại (không bằng một số thực nào).

**Ví dụ 5.3.22.** Xác định xem tích phân  $\int_1^\infty (1/x) dx$  hội tụ hay phân kỳ?

Theo định nghĩa ta có

$$\begin{aligned} \int_1^\infty \frac{1}{x} dx &= \lim_{t \rightarrow \infty} \int_1^t \frac{1}{x} dx = \lim_{t \rightarrow \infty} \ln|x| \Big|_1^t \\ &= \lim_{t \rightarrow \infty} (\ln t - \ln 1) = \lim_{t \rightarrow \infty} \ln t = \infty. \end{aligned}$$

Giới hạn không tồn tại như là một số thực và vì vậy tích phân suy rộng  $\int_1^\infty (1/x) dx$  phân kỳ.

**Ví dụ 5.3.23.** Tích phân

$$\int_1^{\infty} \frac{1}{x^p} dx$$

là hữu hạn khi và chỉ khi  $p > 1$ .

Ta biết từ ví dụ trên là nếu  $p = 1$ , thì tích phân phân kỳ, vì vậy giả sử  $p \neq 1$ . Khi đó

$$\begin{aligned} \int_1^{\infty} \frac{1}{x^p} dx &= \lim_{t \rightarrow \infty} \int_1^t x^{-p} dx \\ &= \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{x^{-p+1}}{-p+1} \Big|_{x=1}^{x=t} \\ &= \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{1-p} \left( \frac{1}{t^{p-1}} - 1 \right) \end{aligned}$$

Nếu  $p > 1$  thì  $p-1 > 0$ , vì vậy khi  $t \rightarrow \infty$ ,  $t^{p-1} \rightarrow \infty$  và  $1/t^{p-1} \rightarrow 0$ . Do đó

$$\int_1^{\infty} \frac{1}{x^p} dx = \frac{1}{p-1} \quad \text{nếu } p > 1$$

và vì vậy tích phân hội tụ. Nhưng nếu  $p < 1$ , thì  $p-1 < 0$  và vì vậy

$$\frac{1}{t^{p-1}} = t^{1-p} \rightarrow \infty \quad \text{khi } t \rightarrow \infty$$

và tích phân phân kỳ.

**Ví dụ 5.3.24.** Tính  $\int_{-\infty}^0 x e^x dx$ .

Sử dụng phần định nghĩa ta có

$$\int_{-\infty}^0 x e^x dx = \lim_{t \rightarrow -\infty} \int_t^0 x e^x dx$$

Ta dùng tích phân từng phần với  $u = x$ ,  $dv = e^x dx$  có  $du = dx$ ,  $v = e^x$ :

$$\begin{aligned} \int_t^0 &= x e^x \Big|_t^0 - \int_t^0 e^x dx \\ &= -t e^t - 1 + e^t \end{aligned}$$

Ta biết rằng  $e^t \rightarrow 0$  khi  $t \rightarrow -\infty$ , và theo quy tắc l'Hospital ta có

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow -\infty} t e^t &= \lim_{t \rightarrow -\infty} \frac{t}{e^{-t}} = \lim_{t \rightarrow -\infty} \frac{1}{-e^{-t}} \\ &= \lim_{t \rightarrow -\infty} (-e^t) = 0 \end{aligned}$$

Do đó

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^0 x e^x dx &= \lim_{t \rightarrow -\infty} (-t e^t - 1 + e^t) \\ &= -0 - 1 + 0 = -1. \end{aligned}$$

**Ví dụ 5.3.25.** Tìm  $\int_2^5 \frac{1}{\sqrt{x-2}} dx$ .

Ta chú ý rằng tích phân đã cho là suy rộng vì  $f(x) = 1/\sqrt{x-2}$  có tiệm cận đứng  $x = 2$ .

$$\begin{aligned} \int_2^5 \frac{dx}{\sqrt{x-2}} &= \lim_{t \rightarrow 2^+} \int_t^5 \frac{dx}{\sqrt{x-2}} \\ &= \lim_{t \rightarrow 2^+} 2\sqrt{x-2} \Big|_t^5 \\ &= \lim_{t \rightarrow 2^+} 2(\sqrt{3} - \sqrt{t-2}) \\ &= 2\sqrt{3}. \end{aligned}$$

**Ví dụ 5.3.26.** Tính  $\int_0^1 \ln x dx$ .

Ta biết rằng hàm số  $f(x) = \ln x$  có tiệm cận đứng tại 0 vì  $\lim_{x \rightarrow 0^+} \ln x = -\infty$ . Do đó tích phân đã cho suy rộng và ta có

$$\int_0^1 \ln x dx = \lim_{t \rightarrow 0^+} \int_t^1 \ln x dx.$$

Bây giờ ta dùng tích phân từng phần với  $u = \ln x$ ,  $dv = dx$ ,  $du = dx/x$  và  $v = x$ :

$$\begin{aligned} \int_t^1 \ln x dx &= x \ln x \Big|_t^1 - \int_t^1 dx \\ &= 1 \ln 1 - t \ln t - (1 - t) \\ &= -t \ln t - 1 + t. \end{aligned}$$

Để tìm giới hạn của số hạng đầu tiên ta dùng quy tắc l'Hospital:

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} t \ln t = \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{\ln t}{1/t} = \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{1/t}{-1/t^2} = \lim_{t \rightarrow 0^+} (-t) = 0.$$

Do đó

$$\int_0^1 \ln x dx = \lim_{t \rightarrow 0^+} (-t \ln t - 1 + t) = -0 - 1 + 0 = -1.$$

**Ví dụ 5.3.27.** Chứng minh rằng  $\int_0^\infty e^{-x^2} dx$  hội tụ.

Ta không thể tính tích phân trực tiếp vì nguyên hàm của  $e^{-x^2}$  không phải là một hàm sơ cấp. Ta viết

$$\int_0^\infty e^{-x^2} dx = \int_0^1 e^{-x^2} dx + \int_1^\infty e^{-x^2} dx$$

và thấy rằng tích phân thứ nhất ở vế phải chỉ là một tích phân Riemann thông thường. Trong tích phân thứ hai ta thấy rằng với  $x \geq 1$  ta có  $x^2 \geq x$ , nên  $-x^2 \leq -x$ , và do đó  $e^{-x^2} \leq e^{-x}$ , do đó

$$\int_1^\infty e^{-x^2} dx \leq \int_1^\infty e^{-x} dx = \lim_{t \rightarrow \infty} \int_1^t e^{-x} dx = \lim_{t \rightarrow \infty} (e^{-1} - e^{-t}) = e^{-1}.$$

Điều này cho phép suy ra  $\int_0^\infty e^{-x^2} dx$  hội tụ.

Tích phân này thường xuất hiện trong Xác suất và Thống kê, xem mục 5.4.4.

## Bài tập

### Tính tích phân

#### 5.3.1. Tính tích phân

(a)  $\int_0^a x\sqrt{a^2 - x^2} dx$ .

(g)  $\int \frac{\sin 2x}{1 + \cos^2 x} dx$ .

(b)  $\int_0^a x\sqrt{x^2 + a^2} dx$ ,  $a > 0$ .

(h)  $\int \frac{\sin 2x}{1 + \sin x} dx$ .

(c)  $\int_{-\pi/3}^{\pi/3} x^4 \sin x dx$ .

(i)  $\int_0^1 z\sqrt{1 - z^2} dz$ .

(d)  $\int_1^2 x\sqrt{x - 1} dx$ .

(j)  $\int_1^2 \frac{\ln 2x}{x} dx$ .

(e)  $\int_0^4 \frac{x}{\sqrt{1+2x}} dx$ .

(k)  $\int \alpha e^{-\alpha^2} d\alpha$ .

(f)  $\int_2^3 \frac{1}{r \ln r} dr$ .

(l)  $\int \frac{e^{\frac{1}{t}}}{t^2} dt$ .



(m)  $\int 1/(2^x + 2^{-x}) dx.$

(n)  $\int_1^2 3x^2 \ln x dx.$

**5.3.2.** Tính tích phân

(a)  $\int x \cos 4x dx$

(g)  $\int e^{2\theta} \sin 3\theta d\theta$

(b)  $\int ye^{0,3y} dy$

(h)  $\int z^3 e^z dz$

(c)  $\int te^{-2t} dt$

(i)  $\int \cos x \ln(\sin x) dx$

(d)  $\int (x^2 + 3x) \cos x dx$

(j)  $\int_4^9 \frac{\ln y}{\sqrt{y}} dy$

(e)  $\int t^3 \ln t dt$

(k)  $\int_1^3 r^3 \ln r dr$

(f)  $\int (\ln x)^2 dx$

(l)  $\int_0^1 \frac{y}{e^{2y}} dy$

**5.3.3.** Tính tích phân

(a)  $\int \frac{x^4}{x-1} dx.$

(g)  $\int_0^1 \frac{x^3 - 4x - 10}{x^2 - x - 6} dx.$

(b)  $\int \frac{3t-2}{t+1} dt.$

(h)  $\int \frac{10}{(x-1)(x^2+9)} dx.$

(c)  $\int_0^1 \frac{2}{2x^2+3x+1} dx.$

(i)  $\int \frac{x^3+x^2+2x+1}{(x^2+1)(x^2+2)} dx.$

(d)  $\int_0^1 \frac{x-4}{x^2-5x+6} dx.$

(j)  $\int \frac{3x^2+x+4}{x^4+3x+2} dx.$

(e)  $\int \frac{1}{(x+a)(x+b)} dx.$

(k)  $\int \frac{x^2-3x+7}{(x^2-4x+6)^2} dx.$

(f)  $\int_3^4 \frac{x^3-2x^2-4}{x^3-2x^2} dx.$

**5.3.4.** Tính tích phân

(a)  $\int_0^1 x^3 \sqrt{1-x^2} dx.$

(e)  $\int \frac{t^5}{\sqrt{t^2+2}} dt.$

(b)  $\int_0^a \frac{dx}{(a^2+x^2)^{3/2}}, a > 0.$

(f)  $\int \sqrt{1-4x^2} dx.$

(c)  $\int \frac{dt}{t^2 \sqrt{t^2-16}}.$

(g)  $\int_0^1 \frac{dx}{(x^2+1)^2}.$

(d)  $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+16}}.$

(h)  $\int \frac{\sqrt{1+x^2}}{x} dx.$

**5.3.5.** Dùng phép đổi biến lượng giác để chứng minh rằng

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+a^2}} = \ln(x + \sqrt{x^2+a^2}) + C.$$

**5.3.6.** Dùng máy tính để tính các tích phân của các hàm:

(a)  $(x^5 + 4x^3 + 2x - 4)/(2x^3 - 8x + 6).$

(b)  $(x^5 + 4x^3 + 2x - 4)/(2x^3 - 4x + 6).$

(c)  $e^{-x^2}.$

(d)  $\sin \ln x.$

(e)  $\sqrt{x + \sqrt{1+x^2}}/x.$

**5.3.7.** Chứng minh công thức truy hồi, với  $n \geq 2$  là một số nguyên:

(a)

$$\int \cos^n x dx = \frac{1}{n} \cos^{n-1} x \sin x + \frac{n-1}{n} \int \cos^{n-2} x dx.$$

(b)

$$\int \sin^n x dx = -\frac{1}{n} \cos x \sin^{n-1} x + \frac{n-1}{n} \int \sin^{n-2} x dx.$$

**5.3.8.** Chứng minh rằng với  $n \geq 2$  là một số nguyên:

(a)

$$\int_0^{\pi/2} \sin^n x dx = \frac{n-1}{n} \int_0^{\pi/2} \sin^{n-2} x dx.$$

(b)

$$\int_0^{\pi/2} \sin^{2n+1} x dx = \frac{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdots 2n}{3 \cdot 5 \cdot 7 \cdots (2n+1)}.$$

(c)

$$\int_0^{\pi/2} \sin^{2n} x dx = \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n-1) \pi}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdots 2n} \frac{\pi}{2}.$$

**5.3.9.** Chứng minh công thức, với  $m$  và  $n$  là các số nguyên dương

(a)  $\int_{-\pi}^{\pi} \sin mx \cos nx dx = 0.$

(b)  $\int_{-\pi}^{\pi} \sin mx \sin nx dx = \begin{cases} 0, & \text{nếu } m \neq n \\ \pi, & \text{nếu } m = n. \end{cases}$

(c)  $\int_{-\pi}^{\pi} \cos mx \cos nx dx = \begin{cases} 0, & \text{nếu } m \neq n \\ \pi, & \text{nếu } m = n. \end{cases}$

**5.3.10.** Một chuỗi Fourier hữu hạn được định nghĩa bởi

$$f(x) = \sum_{n=1}^N a_n \sin nx = a_1 \sin x + a_2 \sin 2x + \cdots + a_N \sin Nx.$$

Chứng minh rằng hệ số  $a_m$  được cho bởi công thức

$$a_m = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin mx dx.$$

## Tính tích phân bằng phương pháp số

**5.3.11.** Dùng Quy tắc điểm giữa với  $n = 6$  để tính xấp xỉ tích phân  $\int_1^3 e^{1/x} dx$ . Ước lượng sai số tính toán.

**5.3.12.** Dùng quy tắc Simpson với  $n = 10$  để ước lượng tích phân  $\int_0^1 e^{x^2} dx$ . Ước lượng sai số của xấp xỉ này.

**5.3.13.** Ta phải chọn  $n$  lớn tới mức nào để đảm bảo rằng xấp xỉ theo quy tắc Simpson cho  $\int_1^2 (1/x) dx$  chính xác với sai số không quá 0,0001?

**5.3.14.** Dùng dữ liệu được cho, quy tắc điểm giữa, qui tắc hình thang, và qui tắc Simpson để ước lượng giá trị của tích phân  $\int_1^5 f(x) dx$ :

$x$	$f(x)$	$x$	$f(x)$
1,0	2,4	3,5	4,0
1,5	2,9	4,0	4,1
2,0	3,3	4,5	3,9
2,5	3,6	5,0	3,5
3,0	3,8		

## Tích phân suy rộng

**5.3.15.** Tính diện tích bên dưới đường  $y = \frac{2}{x^3}$  bên trên trục  $x$  trên khoảng  $[3, \infty)$ .

**5.3.16.** Chứng tỏ phần thể tích nhận được bằng cách xoay quanh trục  $x$  phần mặt phẳng bên dưới đồ thị của hàm  $y = 1/x$  với  $x \geq 1$  bên trên trục  $x$  có thể tích hữu hạn.

**5.3.17.** Xác định tích phân hội tụ hay phân kỳ.

- (a)  $\int_0^1 \frac{3}{x^5} dx.$  (f)  $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} dx.$   
 (b)  $\int_2^3 \frac{1}{\sqrt{3-x}} dx.$  (g)  $\int_0^9 \frac{1}{\sqrt[3]{x-1}} dx.$   
 (c)  $\int_{-2}^{14} \frac{dx}{\sqrt[4]{x+2}}.$  (h)  $\int_0^5 \frac{w}{w-2} dx.$   
 (d)  $\int_6^8 \frac{4}{(x-6)^3} dx.$  (i)  $\int_0^3 \frac{dx}{x^2-6x+5}.$   
 (e)  $\int_{-2}^3 \frac{1}{x^4} dx.$  (j)  $\int_2^3 \frac{dx}{\sqrt{3-x}}.$

**5.3.18.** Tìm xem tích phân sau là hội tụ hay phân kì. Nếu tích phân hội tụ hãy tính nó.

- (a)  $\int_e^\infty \frac{\ln x}{x} dx.$   
 (b)  $\int_0^1 \frac{e^{-1/x}}{x^2} dx.$

**5.3.19.** Xác định tích phân hội tụ hay phân kỳ.

- (a)  $\int_0^\infty \frac{x}{x^3+1} dx.$   
 (b)  $\int_1^\infty \frac{2+e^{-x}}{x} dx.$   
 (c)  $\int_1^\infty \frac{x+1}{\sqrt{x^4-x}} dx.$   
 (d)  $\int_0^\pi \frac{\sin^2 x}{\sqrt{x}} dx.$   
 (e)  $\int_0^\infty x e^{-x^2/2} dx.$   
 (f)  $\int_0^1 \frac{e^{-1/x}}{x^3} dx.$

**5.3.20.** Tìm các giá trị của  $p$  sao cho tích phân hội tụ và tính tích phân với các giá trị đó của  $p$ .

- (a)  $\int_0^1 \frac{1}{x^p} dx.$   
 (b)  $\int_e^\infty \frac{1}{x(\ln x)^p} dx.$   
 (c)  $\int_0^1 x^p \ln x dx.$

## Các bài tập khác

**5.3.21.** Nếu  $f$  liên tục trên  $\mathbb{R}$ , hãy chứng minh

$$\int_a^b f(-x) dx = \int_{-b}^{-a} f(x) dx.$$

Hãy minh họa hình học đẳng thức này.

**5.3.22.** Nếu  $f$  liên tục trên  $\mathbb{R}$ , hãy chứng minh rằng

$$\int_a^b f(x+c) dx = \int_{a+c}^{b+c} f(x) dx.$$

Hãy minh họa hình học đẳng thức này.

**5.3.23.** Cho  $f$  là một hàm liên tục. Đặt

$$g(x) = \int_0^x (x-t)f(t) dt.$$

Đây là một ví dụ của một đối tượng nâng cao hơn trong Giải tích toán học gọi là **tích chập** (convolution).

- (a) Tính  $g$  nếu  $f(x) = x.$   
 (b) Chứng tỏ

$$g(x) = x \int_0^x f(t) dt - \int_0^x t f(t) dt.$$

- (c) Tính  $g'(x)$  và  $g''(x).$

## 5.4 Ứng dụng của tích phân

### 5.4.1 Diện tích, thể tích

#### Diện tích giữa hai đồ thị

Ta biết nếu  $f$  là hàm không âm có tích phân trên đoạn  $[a, b]$  thì diện tích của tập hợp bên dưới đồ thị của  $f$  bằng

$$\int_a^b f(x) dx$$

Bây giờ nếu  $f$  và  $g$  là hai hàm có tích phân với  $f \geq g$  trên  $[a, b]$  thì có thể suy ra diện tích của tập nằm giữa hai đồ thị là

$$\int_a^b [f(x) - g(x)] dx.$$

**Ví dụ 5.4.1.** Tìm diện tích nằm giữa hai đường  $y = x^2$  và  $y = x^3$ .

Ta dễ dàng khảo sát được, và có thể dùng thêm hình vẽ để thấy, rằng hai đường này cắt nhau tại  $x = 0$  và  $x = 1$ , và trên  $[0, 1]$  thì  $x^2 \geq x^3$ . Do đó diện tích của phần nằm giữa hai đồ thị bằng

$$\int_0^1 (x^2 - x^3) dx = \frac{1}{12}.$$

#### Thể tích

Trong phần Tích phân hàm nhiều biến, xem [Bmgt2], chúng ta sẽ khảo sát một cách có hệ thống hơn vấn đề thể tích. Ở đây ta chỉ thảo luận một trường hợp riêng của thể tích.

Nếu một khối trong  $\mathbb{R}^3$  có diện tích của mặt cắt vuông góc trục  $x$  tại  $x \in [a, b]$  là  $A(x)$  thì ta có thể định nghĩa thể tích của khối là

$$\int_a^b A(x) dx.$$

Định nghĩa này nói rằng *thể tích của khối bằng tổng diện tích các mặt cắt song song*.

**Ví dụ 5.4.2.** Thể tích quả cầu bán kính  $R$  là  $V = \frac{4\pi}{3}R^3$ .

Lấy quả cầu tâm  $O$  bán kính  $R$ . Vì nên diện tích của lát cắt tại  $x$  là diện tích của hình tròn có bán kính  $r = \sqrt{R^2 - x^2}$ , do đó

$$A(x) = \pi r^2 = \pi (\sqrt{R^2 - x^2})^2 = \pi (R^2 - x^2).$$

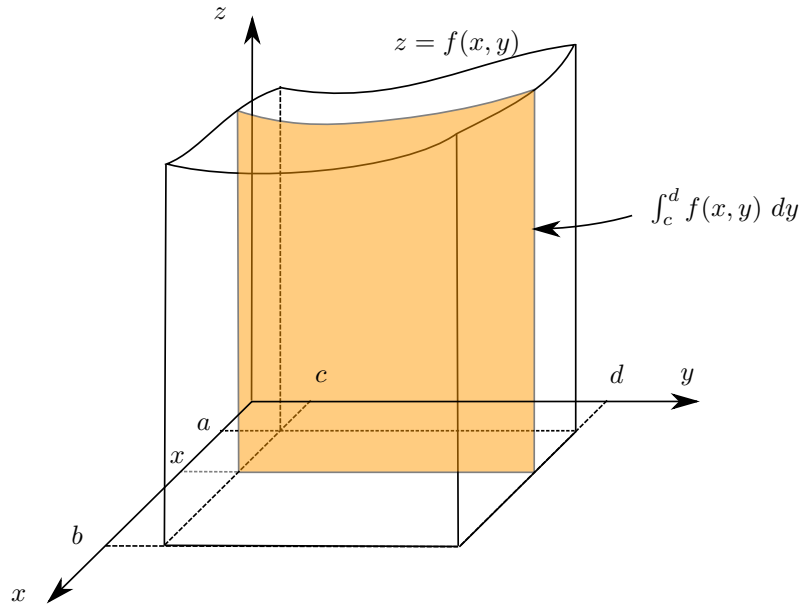
Vậy thể tích quả cầu bằng

$$V = \pi \int_{-R}^R (R^2 - x^2) dx = \pi [R^2x - \frac{1}{3}x^3]_{-R}^R = \frac{4}{3}\pi R^3.$$

**Ví dụ 5.4.3.** Thể tích của khối kim tự tháp với đáy chữ nhật là  $V = \frac{1}{3}Bh$  với  $B$  là diện tích đáy và  $h$  là chiều cao.

**Ví dụ 5.4.4.** Một khối tròn xoay nhận được bằng cách xoay một miền trong mặt phẳng quanh một đường thẳng trong mặt phẳng đó. Giả sử  $f \geq 0$  trên  $[a, b]$ . Thể tích của khối tròn xoay nhận được bằng cách xoay đồ thị của  $f$  quanh trục  $x$  là

$$V = \pi \int_a^b [f(x)]^2 dx.$$



Hình 5.4.1: Thể tích của khối qua diện tích mặt cắt.

### 5.4.2 Giá trị trung bình

Nếu tại các điểm  $x_i$ ,  $1 \leq i \leq n$  có tương ứng các giá trị  $f(x_i)$  thì giá trị trung bình tại các điểm này như ta đã biết là  $\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n f(x_i)$ . Trong trường hợp miền xác định có vô hạn phần tử, giả sử  $f$  được xác định trên  $[a, b]$  thì giá trị trung bình của  $f$  được cho bằng công thức tương tự, chỉ thay tổng bằng tích phân:

$$\frac{1}{b-a} \int_a^b f.$$

Giá trị trung bình của một hàm số trên một miền xác định chính là tổng giá trị của hàm chia cho chiều dài của miền xác định.

Có thể giải thích chi tiết hơn như sau. Chia  $[a, b]$  thành  $n$  đoạn con có cùng chiều dài  $\Delta x$

$$a = x_0 \leq x_1 \leq x_2 \leq \dots \leq x_n = b.$$

Lấy điểm  $x_{i-1} \leq x_i^* \leq x_i$ . Giá trị trung bình của hàm tính tại các điểm chia trên là:

$$\frac{f(x_1^*) + f(x_2^*) + f(x_3^*) + \dots + f(x_n^*)}{n}.$$

Ta viết

$$\begin{aligned} \frac{f(x_1^*) + f(x_2^*) + \dots + f(x_n^*)}{n} &= [f(x_1^*) + f(x_2^*) + \dots + f(x_n^*)] \cdot \frac{b-a}{n} \cdot \frac{1}{b-a} \\ &= [f(x_1^*) + f(x_2^*) + \dots + f(x_n^*)] \cdot \Delta x \cdot \frac{1}{b-a} \end{aligned}$$

Số hạng

$$[f(x_1^*) + f(x_2^*) + \dots + f(x_n^*)] \cdot \Delta x$$

chính là một tổng Riemann của  $f$ . Qua giới hạn ta được ngay giá trị trung bình của hàm là

$$\frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx.$$

**Ví dụ 5.4.5.** Nhiệt độ  $t$  giờ sau 9 giờ sáng được cho bởi

$$T(t) = 30 + 14 \sin \frac{\pi t}{12}.$$

Tìm nhiệt độ trung bình giữa 9 giờ sáng và 9 giờ tối.

Giá trị trung bình của  $T$  giữa  $t = 0$  và  $t = 12$  là

$$\frac{1}{12-0} \int_0^{12} T(t) dt = \frac{1}{12} \int_0^{12} \left( 30 + 14 \sin \frac{\pi t}{12} \right) dt \approx 38,9.$$

### 5.4.3 Một số ứng dụng trong khoa học

Một ý nghĩa chính của tích phân là tính tổng, vì vậy mỗi khi trong khoa học kỹ thuật có nhu cầu tính tổng của vô hạn giá trị thì tích phân có thể xuất hiện.

**Ví dụ 5.4.6 (mạch máu).** Luật dòng chảy về tốc độ dòng máu chảy trong một mạch máu được xây dựng như sau:

$$v(r) = \frac{P}{4\eta l}(R^2 - r^2)$$

trong đó,  $v$  là vận tốc dòng máu chảy trong một mạch máu với bán kính  $R$  và độ dài  $l$  ở một khoảng cách  $r$  từ trục ở tâm,  $P$  là áp lực khác nhau giữa các điểm cuối của mạch máu và  $\eta$  là độ nhớt của máu. Ta tính thể tích máu đi trong mạch máu theo đơn vị thời gian hay còn gọi là thông lượng của dòng máu chảy. Tổng thể tích máu đi qua ở mỗi bán kính cố định trong một đơn vị thời gian là  $v(r)2\pi r$ , vậy tổng thể tích máu đi trong mạch máu trong một đơn vị thời gian là

$$\int_0^R v(r)2\pi r dr = \int_0^R \frac{P}{4\eta l}(R^2 - r^2)2\pi r dr = \frac{\pi PR^4}{8\eta l}.$$

**Ví dụ 5.4.7 (thủy lực).** Một con đập có dạng hình chữ nhật, thẳng đứng. Độ cao của nó là 20 mét và bề rộng là 50 mét. Tính áp lực nước tác động lên con đập nếu mực nước cách đỉnh đập 4 mét.

Áp lực lên một chất lỏng tĩnh ở độ sâu  $d$  dưới bề mặt nằm ngang của chất lỏng có mật độ khối lượng  $\rho$  là  $P = \rho g d$  trong đó  $g$  là hằng số trọng trường. Một trong những nguyên lý quan trọng trong áp lực dòng chảy là tại mọi vị trí trong một chất lỏng tĩnh áp lực giống nhau theo mọi hướng. (Nếu không thì chất lỏng sẽ di chuyển theo hướng có áp lực lớn hơn.)

Đặt một hệ tọa độ lên mặt phẳng của con đập, chọn gốc tọa độ ở góc dưới bên trái của con đập, trục  $x$  nằm ngang và trục  $y$  thẳng đứng hướng lên. Áp lực nước tĩnh tại một điểm có cao độ  $y$  là  $\rho g(16 - y)$ . Tổng áp lực nước trên đập ở cao độ này là  $50\rho g(16 - y)$ , và tổng áp lực nước trên toàn đập là

$$\int_0^{16} 50\rho g(16 - y) dy = 50 \cdot 1000 \cdot 9,8 \cdot (16y - \frac{1}{2}y^2)|_0^{16} = 490000 \cdot (16^2 - \frac{1}{2}16^2) = 62720 \text{ kPa}.$$

Ở đây đơn vị SI để đo áp lực là newton trên mét vuông, còn được gọi là Pascal ( $1N/m^2 = 1Pa$ ). Bởi vì đây là một đơn vị nhỏ, người ta cũng thường sử dụng Kilopascal (kPa).

### Hàm mật độ

Về cơ bản, nếu tại mỗi điểm  $x_i$ ,  $1 \leq i \leq n$  có tương ứng các giá trị  $f(x_i)$  của một đại lượng thì tổng giá trị của đại lượng đó dĩ nhiên là  $\sum_{i=1}^n f(x_i)$ . Nếu tập hợp  $D$  các điểm đang xét là vô hạn thì hàm  $f$  từ  $D$  vào tập các số thực có khi được gọi là **hàm mật độ** của đại lượng, và tổng giá trị của đại lượng là tích phân  $\int_D f$  của hàm mật độ.

**Ví dụ 5.4.8.** Tìm khối lượng của một thanh kim loại dài 2 mét có mật độ khối lượng  $\rho(x) = 1 + x(2 - x)$  kg/m, với  $x$  là khoảng cách từ một đầu của thanh tới điểm đang xét.

Khối lượng của thanh bằng tích phân trên thanh của hàm mật độ khối lượng:

$$\int_0^2 \rho(x) dx = \int_0^2 [1 + x(2 - x)] dx = 10/3 \quad (\text{kg}).$$

## Công

Giả sử một vật di chuyển một khoảng cách  $d$  trên một đường thẳng dưới tác động của một lực hằng  $F$  cùng chiều chuyển động. Công của  $F$  được định nghĩa trong Vật lý là

$$W = Fd.$$

Công đại diện cho tổng tác động của lực vào chuyển động.

Bây giờ xét trường hợp tổng quát hơn, lực  $F$  có thể thay đổi, tuy vẫn cùng phương chuyển động. Đặt một trục tọa độ trên phương chuyển động. Vị trí của vật được cho bởi số thực  $x$  còn độ lớn lực tác động lên vật tại điểm đó được cho bởi  $F(x)$ . Giả sử vật di chuyển từ vị trí  $x = a$  tới vị trí  $x = b$ . Công của lực  $F$  là

$$\int_a^b F(x) dx.$$

**Ví dụ 5.4.9 (động năng).** Giả sử một vật di chuyển dưới tác dụng của tổng lực  $F$ . Giả sử vị trí của vật ở thời điểm  $t$  là  $x(t)$ . Giả sử  $x(t_0) = a$  và  $x(t_1) = b$ . Công của trường với chuyển động này bằng

$$\int_a^b F(x) dx.$$

Ta định nghĩa **động năng** (kinetic energy) (năng lượng từ chuyển động) của vật là  $K(t) = \frac{1}{2}mx'(t)^2$ .

Theo cơ học Newton:  $F = ma = mx''$ . Do đó:

$$\int_a^b F(x) dx = \int_{t_0}^{t_1} F(x(t))x'(t) dt = \int_{t_0}^{t_1} mx''(t)x'(t) dt.$$

Bây giờ chú ý hệ thức  $((x')^2)' = 2x'x''$ , ta biến đổi

$$\begin{aligned} \int_a^b F(x) dx &= \int_{t_0}^{t_1} m \frac{1}{2} (x'(t)^2)' dt \\ &= \frac{1}{2} mx'(t_1)^2 - \frac{1}{2} mx'(t_0)^2 = K(t_1) - K(t_0). \end{aligned}$$

Vậy công tác động lên vật bằng biến thiên động năng của vật.

### 5.4.4 Xác suất

Một biến ngẫu nhiên  $X$  là một ánh xạ từ một tập hợp các sự kiện vào tập hợp các số thực. Trong trường hợp tập giá trị  $D$  của  $X$  là hữu hạn thì ta nói  $X$  là một biến ngẫu nhiên rời rạc. Với mỗi giá trị  $x \in D$  có một số thực  $0 \leq f(x) \leq 1$  là xác suất để  $X$  có giá trị  $x$ , kí hiệu là  $P(X = x)$ . Hàm  $f$  được gọi là hàm phân bố xác suất của biến ngẫu nhiên  $X$ . Xác suất để  $X$  có giá trị trong tập  $C \subset D$  được cho bởi

$$P(X \in C) = \sum_{x \in C} f(x).$$

Một hệ quả là  $\sum_{x \in D} f(x) = P(X \in D) = 1$ . Giá trị trung bình (mean) hay kỳ vọng (expected value) theo xác suất của  $X$  được cho bởi:

$$E(X) = \sum_{x \in D} xf(x).$$

**Ví dụ 5.4.10.** Xét một trò chơi với con xúc sắc như sau: Người chơi phải trả 20 đồng cho mỗi lần tung xúc sắc. Nếu mặt ngửa là mặt 6 nút thì người chơi được nhận 60 đồng, nếu là các mặt còn lại thì chỉ được nhận 10 đồng. Hỏi trong trò chơi này ai được lợi, người chơi hay người tổ chức trò chơi?

Gọi  $X$  là biến xác suất như sau: Mặt 6 nút của xúc sắc ứng với số thực 60, các mặt còn lại ứng với số thực 10. Hàm phân bố xác suất trong trường hợp này là  $f(10) = 5/6$  và  $f(60) = 1/6$ . Câu trả lời cho câu hỏi trên được quyết định bởi giá trị trung bình của biến xác suất  $X$ . Ta có  $E(X) = 10 \cdot \frac{5}{6} + 60 \cdot \frac{1}{6} = \frac{110}{6} < 20$ , như vậy nếu chơi nhiều lần thì người chơi sẽ bị thiệt, còn người tổ chức trò chơi sẽ hưởng lợi.

Trong trường hợp biến ngẫu nhiên liên tục, tập giá trị của biến ngẫu nhiên  $X$  là một tập con vô hạn  $D$  của tập hợp các số thực. Tương tự với trường hợp rời rạc, có một hàm phân bố xác suất, hay mật độ xác suất (probability density function)  $f$  xác định trên  $D$  sao cho  $f(x) \geq 0$  và xác suất để  $X$  có giá trị trong tập  $C \subset D$  được cho bởi

$$P(X \in C) = \int_C f.$$

Một hệ quả là hàm mật độ xác suất phải thỏa  $P(X \in D) = \int_D f = 1$ . Trung bình hay kỳ vọng của biến ngẫu nhiên  $X$  được cho bởi:

$$E(X) = \int_D xf.$$

Chú ý sự tương tự của công thức này với công thức của tâm khối lượng.

**Ví dụ 5.4.11.** Một nhà sản xuất bảo hành một sản phẩm 2 năm. Gọi  $T$  là biến xác suất ứng thời điểm hư hỏng của sản phẩm với số thực  $t \geq 0$  là thời gian từ khi sản phẩm được sản xuất theo năm. Giả sử hàm mật độ xác suất được cho bởi  $f(t) = 0.1e^{-0.1t}$ . Xác suất sản phẩm bị hư trong thời gian bảo hành sẽ là

$$P(0 \leq T \leq 2) = \int_0^2 0.1e^{-0.1t} dt \approx 18\%.$$

**Ví dụ 5.4.12 (phân bố chuẩn).** Nhiều hiện tượng ngẫu nhiên được mô hình hóa bằng hàm phân bố có dạng

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-(x-\mu)^2/2\sigma^2}.$$

Đồ thị của hàm này có dạng trong Hình 5.2.1.

Việc đây thực sự là một hàm phân bố xác suất là hệ quả của công thức

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}.$$

Trong trường hợp này giá trị trung bình là  $\mu$ , còn số  $\sigma$  đo mức độ phân tán của giá trị, được gọi là độ lệch chuẩn (standard deviation).



## Bài tập

### Diện tích, thể tích

**5.4.1.** Tính diện tích miền được bao bởi các đường cong đồ thị của các hàm số:

(a)  $f(x) = 2x^3 + 3$  và  $g(x) = 4x + 3$ .

(b)  $f(x) = 4x - 3x^3$  và  $g(x) = 2x + 1$ .

(c)  $f(x) = (x^2 - 1)(x^2 - 2)$  và trục  $x$ .

(d)  $y = f(x) = 3x^4 - 24x^2 + 50$  và đường thẳng  $\ell$  cắt  $C$  ở  $x = 1$  và  $x = 3$ .

(e)  $y = x(2 - x)$  và  $x = 2y$ .

(f)  $x^2 = 4y$  và  $x = 4y - 2$ .

(g)  $y = x^2$  và  $x = y^2$ .

(h)  $f(x) = x^2$  và  $g(x) = 3/(2 + x^2)$ .

(i)  $y = (1/2)x^2 + 1$  và  $y = x + 1$ .

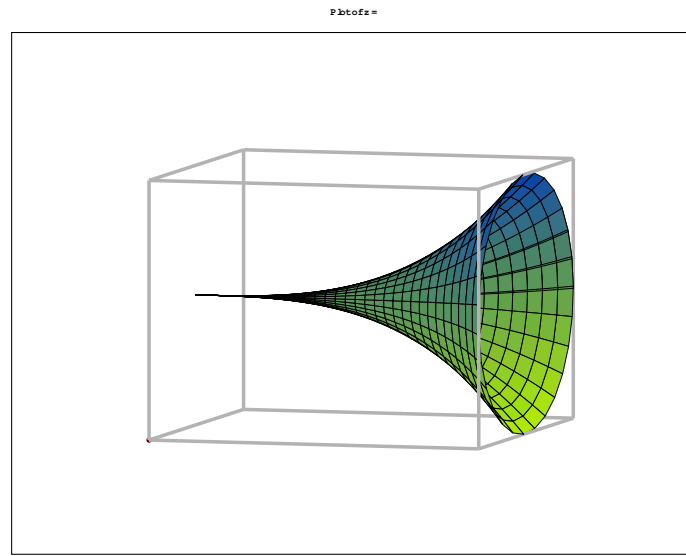
(j)  $x^2 + y^2 = 1$  và  $(x - 1)^2 + y^2 = 1$ .

**5.4.2.** Sử dụng chương trình máy tính để vẽ và tìm diện tích của miền được giới hạn bởi các đường cong  $y = x^5 - 5x^3 + 3x$  và  $y = 2x + 1$ .

**5.4.3.** Sử dụng chương trình máy tính để vẽ và xấp xỉ diện tích của miền được giới hạn bởi các đường cong  $y = |x|$  và  $y = \cos x$ .

**5.4.4.** Một máy chụp cắt lớp vi tính theo trục ngang CAT (Computerized Axial Tomography) tạo ra ảnh chụp phần trong của một cơ quan của cơ thể con người nhằm cung cấp thông tin về cơ quan mà không cần phẫu thuật. Giả sử rằng một máy chụp cắt lớp vi tính CAT chụp cắt lớp một lá gan của một người với khoảng cách các mặt cắt cách đều nhau một khoảng là 1,5 cm. Cho biết chiều dài lá gan là 15 cm và diện tích các mặt cắt ngang (đơn vị  $\text{cm}^2$ ) là 0, 14, 50, 70, 90, 100, 110, 120, 70, 40, 0. Hãy ước tính thể tích lá gan.

**5.4.5.** Tìm thể tích của khối bao bởi mặt tròn xoay nhận được bằng cách xoay đường  $y = x^3$  quanh trục  $x$  với  $x$  từ 0 tới 2.



**5.4.6.** Tìm thể tích của khối được tạo bằng cách xoay miền bao bởi đồ thị của hàm  $f(x) = x - x^3$  và trục  $x$  quanh trục  $y$ .

**5.4.7.** Tìm thể tích của khối nhận được bằng cách xoay quanh trục  $y$  phần mặt phẳng bao bởi đường  $y = x^2 - 4x + 4$  và đường  $y = 1$ .

**5.4.8.** Tính thể tích các khối  $S$  được mô tả sau đây.

- Hình nón thẳng đứng có chiều cao  $h$  và bán kính của hình tròn đáy  $r$ .
- Một hình nón cụt thẳng đứng có chiều cao  $h$ , bán kính mặt đáy dưới là  $R$  và bán kính của mặt đáy trên là  $r$ .
- Một nắp tròn xoay (khối tròn xoay được cắt ra từ một hình cầu) có bán kính  $r$  và chiều cao nắp là  $h$ .
- Một khối chóp cụt có đáy dưới là hình vuông có cạnh  $b$ , đáy trên là hình vuông có cạnh  $a$ , và chiều cao khối chóp cụt là  $h$ .
- Một khối hình chóp tứ giác với chiều cao  $h$  và đáy hình chữ nhật với chiều rộng  $b$ , chiều dài  $2b$ .
- Một hình chóp tam giác với chiều cao  $h$  và đáy là tam giác đều có cạnh  $a$ .
- Mặt đáy của  $S$  là một miền có dạng elip với đường biên là  $9x^2 + 4y^2 = 36$ . Các thiết diện vuông góc với trục  $Ox$  là hình tam giác vuông cân với cạnh huyền thuộc mặt đáy.

**5.4.9.** Nhiệt độ trong một nhà kính được điều khiển theo thiết kế  $T(t) = 25 - 3 \cos(\frac{\pi}{12}t)$ , với  $t$  là thời gian tính bằng giờ từ nửa đêm. Tìm nhiệt độ trung bình vào ban ngày (6 giờ sáng tới 6 giờ tối) và ban đêm.

## Ứng dụng trong kinh tế

**5.4.10.** Hàm chi phí biên (còn gọi là chi phí cận biên – marginal cost) (xấp xỉ bằng chi phí cho mỗi đơn vị sản phẩm) khi  $x$  đơn vị sản phẩm được sản xuất là

$$C'(x) = \sqrt{x} - 3e^{2x}.$$

Chi phí cố định là (fixed cost) là  $C(0) = 1000$ . Tìm hàm chi phí  $C(x)$ .

**5.4.11.** Hàm chi phí biên khi  $x$  đơn vị sản phẩm được sản xuất là

$$C'(x) = e^{0,3x} + 4x^2 + 5.$$

Chi phí cố định là  $C(0) = 10$ .

- Tìm hàm chi phí  $C(x)$ .
- Tính chi phí trung bình trong khoảng qui mô sản xuất  $0 \leq x \leq 10$ .

**5.4.12.** Hàm doanh thu biên (marginal revenue) từ sản xuất  $q$  đơn vị của một sản phẩm là  $R'(q) = 5 - e^{7q}$ . Không có doanh thu khi không có sản phẩm. Hãy tìm hàm doanh thu  $R(q)$ .

**5.4.13.** Doanh thu  $R$  (triệu đồng) từ bán một sản phẩm trong một ngày phụ thuộc vào thời điểm  $t$  (giờ) kể từ 7 giờ sáng, cho bởi

$$R(t) = t^4 - 12t^3 + 46t^2 - 60t + 50.$$

- Hãy tính tổng doanh thu từ 9 giờ tới 15 giờ.
- Hãy tính doanh thu trung bình trong khoảng thời gian này.

**5.4.14.** Hàm cung ứng (supply function) của một sản phẩm là

$$p = S(x) = 5 + 3e^{0,001x}$$

trong đó  $p$  là giá bán sản phẩm và  $x$  là sản lượng sản phẩm. Tính giá trung bình trong khoảng cung ứng  $10 \leq x \leq 20$ .

**5.4.15.** Doanh thu  $R$  (triệu đồng) từ bán một sản phẩm một năm phụ thuộc vào thời điểm  $t$  (tháng) kể từ đầu năm, cho bởi

$$R(t) = 0,1(t - 7)^2 + 2.$$

- Vẽ đồ thị của hàm doanh thu.
- Tính tổng doanh thu một năm.
- Tính doanh thu trung bình hằng tháng.

**5.4.16.** Một công ty sản xuất  $x$  đơn vị sản phẩm mỗi tháng. Phương trình liên hệ giá  $p$  mỗi đơn vị sản phẩm với sản lượng  $x$  là  $p = 500 - 0,25x$ ,  $0 \leq x \leq 1000$ .

- Chi phí cho mỗi đơn vị sản phẩm (chi phí biên – marginal cost) là 300, chi phí cố định là 70. Tìm hàm chi phí.
- Tìm hàm doanh thu và hàm lợi nhuận.
- Vẽ đồ thị hàm lợi nhuận.
- Với qui mô sản xuất như thế nào thì công ty có lợi nhuận dương?
- Với qui mô sản xuất như thế nào thì công ty có lợi nhuận tối đa?
- Tìm lợi nhuận bình quân (lợi nhuận trung bình) nếu công ty sản xuất trong khoảng 300 tới 500 đơn vị sản phẩm mỗi tháng.
- Nếu chính quyền đánh thuế 4 đơn vị tiền tệ trên mỗi đơn vị sản phẩm mà công ty sản xuất ra, thì công ty nên bán sản phẩm ở giá bao nhiêu để có lợi nhuận lớn nhất?

## Ứng dụng trong vật lí

**5.4.17.** Một chiếc xe đang chạy trên đường thì người lái thấy một vật cản và lập tức áp dụng thắng hãm xe. Tại thời điểm áp dụng thắng xe đang chạy với vận tốc 60 kilômét một giờ. Xe hãm với gia tốc là 44 mét trên giây bình phương.

- Viết công thức cho vận tốc xe  $t$  giây sau khi áp dụng thắng. Khi nào xe dừng?
- Viết công thức cho khoảng cách di chuyển của xe  $t$  giây sau khi áp dụng thắng. Xe đi bao xa trước khi dừng?

**5.4.18.** Diện tích phân bố dọc theo một ống thẳng dài 10 cm theo mật độ  $\rho(x) = 10^{-4} \frac{x}{x^2+1}$  coulomb/cm với  $x$  là khoảng cách tới đầu ống. Hãy tính tổng điện tích trong ống.

**5.4.19.** Một cái bồn có dạng hình hộp với chiều rộng 3 mét, chiều dài 4 mét, chiều cao 5 mét chứa đầy nước. Ta cần tính công  $W$  – năng lượng cần thiết để bơm hết nước ra khỏi bồn qua mặt trên của bồn.

- Gọi  $x$  là khoảng cách từ một chất điểm trong bồn tới mặt trên của bồn. Giải thích vì sao công để đưa chất điểm này ra khỏi bồn là  $x\rho g$ , với mật độ khối lượng của nước là  $\rho = 1000 \text{ kg/m}^3$ , hằng số trọng lực là  $g = 9,8 \text{ m/s}^2$ .
- Thiết lập công thức  $W = \int_0^5 x\rho g \cdot 3 \cdot 4 \, dx$ . Tính  $W$ .

**5.4.20.** Một hồ bơi hình tròn có đường kính 24 mét, tường bao quanh hồ cao 5 mét, và độ sâu của nước trong hồ là 4 mét. Tính công cần thiết để bơm tất cả nước lên trên tường bao quanh và ra khỏi hồ. (khối lượng riêng của nước là  $1000 \text{ kg/m}^3$ .)

**5.4.21.** Định luật vạn vật hấp dẫn của Newton phát biểu rằng hai vật có khối lượng  $m_1$  và  $m_2$  sẽ bị hút gần nhau bằng một lực

$$F = G \frac{m_1 m_2}{r^2}$$

trong đó  $r$  là khoảng cách giữa các vật thể  $G$  là hằng số hấp dẫn. Nếu một trong hai vật thể được cố định, tính công cần thiết để di chuyển vật còn lại từ  $r = a$  đến  $r = b$ .

Tính công, tức tổng năng lượng được tạo ra từ nhiên liệu tên lửa, cần thiết để phóng một vệ tinh nặng 1000 kg theo chiều thẳng đứng lên đến độ cao 1.000 km.

Giả sử rằng khối lượng của Trái đất là  $5,98 \times 10^{24} \text{ kg}$  và được tập trung tại tâm quả đất. Lý bán kính trái đất là  $6,37 \times 10^6 \text{ m}$  và  $G = 6,67 \times 10^{-11} \text{ N} \cdot \text{m}^2/\text{kg}^2$ .

**5.4.22.** Điện gia dụng được cung cấp theo hình thức điện xoay chiều thay đổi từ  $155V$  đến  $-155V$  với tần số 60 chu kỳ mỗi giây (Hz). Điện áp được cho bởi phương trình

$$E(t) = 155 \sin(120\pi t)$$

trong đó  $t$  là thời gian tính theo giây. Các vôn kế đọc điện áp hiệu dụng (RMS), đó là căn bậc hai của giá trị trung bình của  $[E(t)]^2$  trong một chu kỳ.

- Tính điện áp RMS của dòng điện gia dụng trên.
- Nhiều bếp điện yêu cầu một điện áp RMS  $220V$ . Tìm biên độ  $A$  tương ứng cần thiết cho điện áp  $E(t) = A \sin(120\pi t)$ .

### Các ứng dụng khác

**5.4.23.** Cao huyết áp là do động mạch bị hẹp lại và để đạt được thông lượng dòng chảy bình thường tim phải bơm mạnh hơn, tức là tăng huyết áp. Hãy tìm quan hệ giữa bán kính động mạch và áp lực máu trong điều kiện thông lượng máu không đổi. Nếu bán kính động mạch bị giảm đi  $1/4$  thì áp lực máu phải tăng lên bao nhiêu để đảm bảo cung cấp đủ máu cho cơ thể?

**5.4.24.** Một nhà sản xuất bảo hành sản phẩm 2 năm. Thời gian cho tới hư hỏng của sản phẩm được ước lượng bởi hàm mật độ xác suất

$$f(t) = 0,1e^{-0,1t}$$

trong đó  $t$  là năm kể từ ngày sản xuất. Hãy tính xác suất sản phẩm bị hư trong thời gian bảo hành.

**5.4.25.** Thời gian sử dụng được của một loại vỏ xe được cho bởi hàm mật độ xác suất  $f(x) = 0,02e^{-0,02x}$ . Hãy tìm xác suất để vỏ xe này dùng được ít nhất 30.000 kilômét.

**5.4.26.** Tốc độ của xe trên đường cao tốc có giới hạn 100 km/h tuân theo phân phối chuẩn với giá trị trung bình 112 km/h và độ lệch chuẩn 8 km/h.

- Xác suất mà một xe bất kỳ chạy với tốc độ cho phép là bao nhiêu?
- Nếu cảnh sát phạt những người lái xe chạy quá 125 km/h, bao nhiêu phần trăm người lái xe sẽ bị phạt?

**5.4.27.** Chứng minh rằng hàm mật độ xác suất của phân phối chuẩn có 2 điểm uốn tại  $x = \mu \pm \sigma$ .

**5.4.28.** Với mọi phân phối chuẩn, tính xác suất mà một biến ngẫu nhiên nhận giá trị trong đoạn  $[\mu - 2\sigma, \mu + 2\sigma]$ .

# Chương 6

## Chuỗi

### 6.1 Tiếp theo về Dãy số thực

Trong phần này ta khảo sát sâu hơn về dãy số, tiếp theo Mục 1.1.4. Phần này được cần tới cho phần chuỗi kế tiếp.

**Mệnh đề 6.1.1 (Dãy hội tụ thì bị chặn).** *Nếu một dãy số hội tụ thì nó bị chặn.*

Ta nhắc lại một dãy  $(a_n)_{n \in \mathbb{Z}^+}$  là bị chặn nếu tập số thực  $\{a_n \mid n \in \mathbb{Z}^+\}$  là bị chặn, nghĩa là tồn tại một số  $M > 0$  sao cho  $\forall n \in \mathbb{Z}^+, |a_n| \leq M$ .

Nếu dãy là hội tụ thì các phần tử của dãy, trừ ra hữu hạn phần tử, sẽ gần giới hạn. Điều này rõ ràng dẫn tới dãy được chứa trong một khoảng đủ lớn. Lí luận chính xác như sau.

*Chứng minh.* Giả sử dãy  $(a_n)_{n \in \mathbb{Z}^+}$  hội tụ về  $L$ . Có  $N \in \mathbb{Z}^+$  sao cho  $n \geq N \implies |a_n - L| < 1$ . Như thế với  $n \geq N$  thì  $|a_n| \leq L + 1$ . Đặt  $M = \max\{|a_n|, L + 1 \mid 1 \leq n \leq N - 1\}$  thì  $\forall n \in \mathbb{Z}^+, |a_n| \leq M$ .  $\square$

Nếu  $(n_k)_{k \geq 1}$  là một dãy các số nguyên dương thỏa  $n_1 < n_2 < n_3 < \dots$ , nghĩa là  $\forall k \in \mathbb{Z}^+, n_k < n_{k+1}$ , thì dãy  $(b_k)_{k \geq 1}$  định bởi  $b_k = a_{n_k}$  được gọi là một **dãy con** của dãy  $(a_n)_{n \geq 1}$ .

**Ví dụ 6.1.2.** Dãy  $(\frac{1}{2^k})_{k \in \mathbb{Z}^+}$  là một dãy con của dãy  $(\frac{1}{n})_{n \in \mathbb{Z}^+}$ , ở đây  $n_k = 2^k$ .

**Ví dụ 6.1.3.** Đặt  $b_k = a_{n+k}$  thì  $(b_k)_k$  là một dãy con của dãy  $(a_n)_n$ .

**Mệnh đề 6.1.4.** *Nếu một dãy hội tụ thì mọi dãy con của dãy đó cũng hội tụ về cùng giới hạn. Dùng kí hiệu, giả sử dãy  $(a_n)_n$  hội tụ về số thực  $L$ , khi đó mọi dãy con  $(a_{n_k})_k$  cũng hội tụ về  $L$ .*

*Chứng minh.* Nếu có một dãy con  $(a_{n_k})_k$  mà không hội tụ về  $L$  thì tồn tại  $\epsilon > 0$  sao cho với mọi  $K > 0$  tồn tại  $l \geq K$  sao cho  $|a_{n_l} - L| \geq \epsilon$ . Vì dãy  $(n_k)_k$  tăng nên  $n_k \geq k$ , do đó  $n_l \geq K$ . Vậy dãy  $(a_n)_n$  không hội tụ về  $L$ , trái giả thiết.  $\square$

**Ví dụ 6.1.5.** Nếu  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = L$  thì  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_{n+4} = L$ .

**Định lý 6.1.6 (Đơn điệu và bị chặn thì hội tụ).** *Một dãy tăng và bị chặn trên thì hội tụ. Một dãy giảm và bị chặn dưới thì hội tụ.*

Cả hai kết quả đều là hệ quả trực tiếp của sự tồn tại chặn trên nhỏ nhất và chặn dưới lớn nhất trong tập hợp các số thực, xem Mệnh đề 1.1.7. Vì thế ta không đi vào chi tiết.

Trong nhiều trường hợp dãy  $(a_n)_{n \in \mathbb{Z}^+}$  là thu hẹp của một hàm biến thực  $f(x)$ , cụ thể  $f: [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$  và  $a_n = f(n)$ . Khi đó ta có thể dùng được những phương pháp và kết quả của Vi Tích phân trên hàm số thực vào dãy số thực nhờ mệnh đề sau, nói rằng giới hạn của dãy đúng bằng giới hạn của hàm:

**Mệnh đề 6.1.7.** Giả sử  $f : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$  và  $\forall n \in \mathbb{Z}^+, a_n = f(n)$ . Nếu  $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = L$  (có thể bằng  $\pm\infty$ ) thì  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = L$ .

Kết quả trên có thể nhận được ngay lập tức từ sự giống nhau trong định nghĩa giới hạn của dãy và giới hạn của hàm.

Một kết quả tương tự dùng sự liên tục của hàm số ở Mệnh đề 2.2.10 mà ta phát biểu lại dưới đây:

**Mệnh đề 6.1.8.** Giả sử hàm số  $f$  liên tục tại  $a$ . Nếu  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$  thì  $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = f(a)$ .

Sau đây là một số giới hạn của dãy liên quan tới hàm lũy thừa và hàm mũ thường gặp.

**Mệnh đề 6.1.9.** (a) Với  $r > 0$  thì  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^r} = 0$ .

(b) Với  $|r| < 1$  thì  $\lim_{n \rightarrow \infty} r^n = 0$ .

(c) Với  $r > 0$  thì  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{r} = 1$ .

(d) Với  $r > 1$  và  $\alpha \in \mathbb{R}$  thì  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^\alpha}{r^n} = 0$ .

(e)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n} = 1$ .

(f) Với  $r > 0$  thì  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{r^n}{n!} = 0$ .

*Chứng minh.* Việc chứng minh sẽ dễ dàng hơn nếu dùng các kết quả trên.

(a) Với  $r > 0$ , nếu  $M$  là số thực dương bất kì thì  $x^r > M \iff x > M^{\frac{1}{r}}$  từ tính chất của hàm lũy thừa, do đó  $\lim_{x \rightarrow \infty} x^r = \infty$ , dẫn tới  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x^r} = 0$ . Suy ra  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^r} = 0$  từ Mệnh đề 6.1.7.

(b) Giả sử  $0 < r < 1$ . Ta tìm giới hạn  $\lim_{x \rightarrow \infty} r^x$ . Ta lấy hàm  $\ln$ , được

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \ln r^x = \lim_{x \rightarrow \infty} x \ln r = -\infty.$$

Suy ra  $\lim_{x \rightarrow \infty} r^x = 0$ , do tính chất của hàm  $\ln$ .

(c) Cũng như trên, ta dùng Mệnh đề 6.1.7. Lấy hàm  $\ln$ , vì

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \ln r^{\frac{1}{x}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x} \ln r = 0$$

nên  $\lim_{x \rightarrow \infty} r^{\frac{1}{x}} = 1$ . Hoặc ta có thể viết lại  $\sqrt[n]{r} = r^{\frac{1}{n}}$  rồi dùng tính liên tục của hàm mũ cùng Mệnh đề 6.1.8: Vì  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0$  và  $\lim_{x \rightarrow 0} r^x = r^0 = 1$ , nên  $\lim_{n \rightarrow \infty} r^{\frac{1}{n}} = 1$ .

(d)

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^\alpha}{r^n} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x}{(r^{\frac{1}{\alpha}})^x}.$$

Áp dụng qui tắc L'Hôpital, với  $r > 1$  ta tính được

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x}{(r^{\frac{1}{\alpha}})^x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{(r^{\frac{1}{\alpha}})^x \ln(r^{\frac{1}{\alpha}})} = 0.$$

(e) Lại dùng hàm  $\ln$ , ta có  $\ln x^{\frac{1}{x}} = \frac{1}{x} \ln x$ . Áp dụng qui tắc L'Hôpital ta được ngay

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln x}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x} = 0.$$

Vậy  $\lim_{x \rightarrow \infty} x^{\frac{1}{x}} = 1$ .

(f) Lấy  $n_0 > r$ , ta có thể viết cho  $n > n_0$ :

$$\frac{r^n}{n!} = \frac{r^{n_0}}{n_0!} \cdot \frac{r}{n_0 + 1} \cdots \frac{r}{n - 1} \cdot \frac{r}{n} < \frac{r^{n_0}}{n_0!} \cdot \frac{r}{n}.$$

Vì  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{r}{n} = 0$  nên dùng nguyên lý kẹp ta được kết quả.  $\square$

## Bài tập

**6.1.1.** Sử dụng định lý giới hạn kẹp và các giới hạn cơ bản, hãy tìm các giới hạn sau

(a)  $\lim \frac{\sin n}{n}$

(f)  $\lim \sqrt[n]{n}$

(b)  $\lim \frac{\cos^2 n - \sin^2 n}{n}$

(g)  $\lim \sqrt[n]{n^2 + 1}$

(c)  $\lim \frac{n!}{n^n}$

(h)  $\lim \sqrt[n]{n^2 + n + 1}$

(d)  $\lim \sqrt[n]{n + 2}$

(i)  $\lim \sqrt[n]{n(n - 2)}$

(e)  $\lim \sqrt[3]{3n + 2}$

(j)  $\lim \left(\frac{99}{n}\right)^n$

**6.1.2.** Cho  $(x_n)$  là dãy số dương hội tụ về  $x > 0$ . Chứng minh rằng  $\lim \sqrt{x_n} = 1$ . Nếu  $x = 0$  thì kết quả còn đúng không?

**6.1.3.** Cho dãy số  $(a_n)$  định bởi  $a_n = 1,5 \dots 5$  có biểu diễn thập phân gồm  $n$  chữ số 5.

(a) Chứng minh dãy  $(a_n)$  có giới hạn.

(b) Tìm hệ thức giữa  $a_{n+1}$  và  $a_n$  để tính giới hạn của dãy (giá trị của giới hạn này thường được viết là  $1,5$  mà ta gọi là số thập phân vô hạn tuần hoàn).

**6.1.4.** Cho dãy số  $(a_n)$  được định nghĩa như sau:  $a_1 = 1$  và  $\forall n \geq 1, a_{n+1} = 3 + \frac{1}{a_n}$ . Chứng minh dãy  $(a_n)$  tăng và bị chặn trên bởi 3. Tính giới hạn của dãy.

**6.1.5.** Cho dãy số  $(a_n)$  được định nghĩa như sau:  $a_1 = 2$  và  $\forall n \geq 1, a_{n+1} = \frac{1}{3 - a_n}$ . Chứng minh dãy  $(a_n)$  thỏa  $\forall n, 0 < a_n \leq 2$  và là dãy tăng. Tính giới hạn của dãy.

**6.1.6.** Cho dãy số  $(a_n)$  được định nghĩa như sau:  $a_1 = a > 0$  và  $\forall n \geq 1, a_{n+1} = \sqrt{a + a_n}$ . Chứng minh dãy  $(a_n)$  đơn điệu và bị chặn. Tính giới hạn của dãy. Hướng dẫn: phân hai trường hợp,  $0 < a \leq 2$ ;  $a > 2$ .

**6.1.7.** Cho dãy số  $(a_n)$  được định nghĩa như sau:  $a_1 = \sqrt{a}$  ( $a > 0$ ), và  $\forall n \geq 1, a_{n+1} = \sqrt{a + a_n}$ . Chứng minh dãy  $(a_n)$  đơn điệu và bị chặn. Tính giới hạn của dãy này (người ta hay viết giới hạn đó dưới dạng  $\sqrt{a + \sqrt{a + \sqrt{a + \dots}}}$ ).

**6.1.8.** Cho dãy số  $(a_n)$  được định nghĩa như sau:  $a_1 = \frac{5}{2}$  và  $\forall n \geq 1, a_{n+1} = \frac{1}{5}(a_n^2 + 6)$ . Chứng minh dãy  $(a_n)$  đơn điệu và bị chặn. Tính giới hạn của dãy.

**6.1.9.** Cho dãy số  $(a_n)$  được định nghĩa như sau:  $a_1 = 10$  và  $\forall n \geq 1, a_{n+1} = \frac{a_n}{2} + \frac{1}{a_n}$ . Chứng minh dãy  $(a_n)$  đơn điệu và bị chặn. Tính giới hạn của dãy.

**6.1.10.** Cho dãy số  $(a_n)$  được định nghĩa như sau:  $a_1 = 1$  và  $\forall n \geq 1, a_{n+1} = \frac{a_n}{2} + \frac{1}{[a_n]}$  ( $[a_n]$  là số nguyên lớn nhất nhưng không vượt quá  $a_n$ ). Chứng minh dãy  $(a_n)$  đơn điệu và bị chặn. Tính giới hạn của dãy.

**6.1.11.** Cho hai dãy số  $(e_n)$  và  $(E_n)$  định bởi

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, e_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n; \quad E_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1}.$$

Chứng minh rằng

a)  $\forall n \in \mathbb{N}^*, e_{n+1} \geq e_n$ . Hướng dẫn:

$$\frac{e_{n+1}}{e_n} = \frac{n+1}{n} \left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^{n+1},$$

dùng bất đẳng thức Bernouli.

b)  $\forall n \in \mathbb{N}^*, E_n \geq E_{n+1}$ . Hướng dẫn:

$$\frac{E_n}{E_{n+1}} = \frac{n}{n+1} \left(1 + \frac{1}{n(n+1)}\right)^{n+2}.$$

c) Chứng minh hai dãy đã cho có cùng giới hạn. Giới hạn đó được ký hiệu bởi  $e$ , hằng số Napier.

**6.1.12.** Giả sử dãy  $(a_n)$  hội tụ về số thực  $L$ . Khi đó  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_{n+k} = L$ , với  $k$  là số nguyên cố định.

**6.1.13.** Chứng tỏ:

(a) Nếu dãy số  $(b_n)$  thỏa  $\forall n, b_n \neq 0$  và  $\lim b_n = 0$  thì  $\lim \frac{1}{|b_n|} = \infty$ .

(b) Nếu  $\lim a_n = \pm\infty$  thì  $\lim \frac{1}{a_n} = 0$ .

(c) Nếu  $\lim a_n = \infty$  thì  $\lim(-a_n) = -\infty$ ; nếu  $\lim a_n = -\infty$  thì  $\lim(-a_n) = \infty$ .

**6.1.14.** Chứng tỏ rằng nếu hai dãy con  $(a_{2n})_n$  và  $(a_{2n+1})_n$  đều hội tụ về  $L$  thì dãy  $(a_n)_n$  hội tụ về  $L$ .

## 6.2 Chuỗi số thực

### 6.2.1 Sự hội tụ của chuỗi số

Với dãy số  $(u_n)_{n \in \mathbb{Z}^+}$  thì biểu thức tổng các số trong dãy

$$u_1 + u_2 + u_3 + \cdots + u_n + \cdots$$

được gọi là một chuỗi số, được ký hiệu là  $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ . Thành phần  $u_n$  được gọi là số hạng thứ  $n$  của chuỗi.

**Định nghĩa 6.2.1.** Cho dãy số  $(u_n)_{n \in \mathbb{Z}^+}$ . Tổng của  $n$  số hạng đầu tiên của dãy, tức  $S_n = \sum_{k=1}^n u_k$ , được gọi là tổng riêng thứ  $n$  của dãy. Dãy các tổng riêng  $(S_n)_{n \in \mathbb{Z}^+}$  được gọi là một **chuỗi số**. Nếu dãy các tổng riêng  $(S_n)_{n \in \mathbb{Z}^+}$  có giới hạn là một số thực  $S$  khi  $n \rightarrow \infty$  thì chuỗi được gọi là hội tụ và  $S$  được gọi là **tổng của chuỗi**; trong trường hợp này ta viết  $S = \sum_{k=1}^{\infty} u_k$ . Ngược lại, nếu dãy  $(S_n)_{n \in \mathbb{Z}^+}$  không hội tụ thì chuỗi được gọi là **phân kỳ**.

Trong thực tế ta thường nói ngắn gọn hơn “xét chuỗi  $\sum_{n=1}^{\infty} u_n \dots$ ”.

**Ví dụ 6.2.2.** Xét chuỗi  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$ .

Vì  $\frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$  nên tổng riêng phần là  $S_n = 1 - \frac{1}{n+1}$  hội tụ về 1. Vậy chuỗi hội tụ về 1.



**Ví dụ 6.2.3 (Chuỗi hình học).** Chuỗi

$$\sum_{n=1}^{\infty} ar^{n-1},$$

được gọi là chuỗi hình học. Ta có

$$S_n = \sum_{i=1}^n ar^{i-1} = a \frac{1-r^n}{1-r}.$$

Do đó  $S_n$  hội tụ khi và chỉ khi  $|r| < 1$ . Vậy:

$$\sum_{n=1}^{\infty} ar^{n-1} = \frac{a}{1-r}, \quad |r| < 1.$$

**Ví dụ 6.2.4.** Chuỗi

$$5 - \frac{10}{3} + \frac{20}{9} - \frac{40}{27} + \dots$$

là một chuỗi hình học với  $a = 5$ ,  $r = -2/3$ .

**Ví dụ 6.2.5.** Chuỗi

$$\sum_{n=1}^{\infty} 2^{2n} 3^{1-n}$$

là một chuỗi hình học với  $a = 3$ ,  $r = 4/3$ .

**Ví dụ 6.2.6.** Viết số  $0, \overline{123} = 0, 123123 \dots$  dưới dạng phân số.

Ta viết

$$0, \overline{123} = 123 \cdot 10^{-3} + 123 \cdot 10^{-6} + \dots$$

thì đây là một chuỗi hình học và ta tính được ngay tổng của chuỗi này là  $123 \cdot 10^{-3} \frac{1}{1-10^{-3}} = \frac{123}{999}$ . Vậy

$$0, \overline{123} = 0, 123123 \dots = \frac{123}{999}.$$

Các tính chất cơ bản sau của chuỗi có thể được thấy ngay từ định nghĩa.

**Mệnh đề 6.2.7.** (a) Tính hội tụ hay phân kỳ của một chuỗi số sẽ không đổi khi ta bỏ đi một số hữu hạn số hạng đầu của chuỗi số.

(b) Nếu ta bỏ đi hay thêm vào một số hữu hạn số hạng ở những vị trí bất kỳ thì tính hội tụ hay phân kỳ cũng không đổi.

**Mệnh đề 6.2.8.** (a) Cho số thực  $a$ , nếu chuỗi số  $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$  hội tụ và  $\sum_{n=1}^{\infty} u_n = S$  thì chuỗi  $\sum_{n=1}^{\infty} au_n$  cũng hội tụ và  $\sum_{n=1}^{\infty} au_n = aS$ .

(b) Nếu  $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$  và  $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$  là các chuỗi số hội tụ thì các chuỗi tổng  $\sum_{n=1}^{\infty} (u_n + v_n)$  và chuỗi hiệu  $\sum_{n=1}^{\infty} (u_n - v_n)$  cũng hội tụ và thoả

$$\sum_{n=1}^{\infty} (u_n + v_n) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n + \sum_{n=1}^{\infty} v_n, \quad \sum_{n=1}^{\infty} (u_n - v_n) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n - \sum_{n=1}^{\infty} v_n.$$

Ta có điều kiện cần cho sự hội tụ của một chuỗi số sau đây.

**Mệnh đề 6.2.9.** Nếu  $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$  hội tụ thì  $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n \rightarrow 0$ .

Như vậy để chuỗi là hội tụ thì điều kiện cần là số hạng của chuỗi phải tiến về 0.

*Chứng minh.* Giả sử  $\sum_{n=1}^{\infty} u_n = S$ . Điều này có nghĩa là tổng riêng phần  $S_n$  hội tụ về  $S$ . Mặt khác  $u_n = S_n - S_{n-1}$ . Lấy giới hạn hai vế khi  $n \rightarrow \infty$ , vì  $S_{n-1}$  cũng hội tụ về  $S$ , nên  $u_n$  phải hội tụ về 0.  $\square$

Cần nhấn mạnh là chiều ngược lại là không đúng, xem ví dụ sau:

**Ví dụ 6.2.10 (Chuỗi điều hòa).** Xét chuỗi

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}.$$

Mặc dù số hạng của chuỗi này dần về 0, ta sẽ chứng tỏ ở Ví dụ 6.2.14 rằng chuỗi này là phân kì.

Ta có một hệ quả:

**Hệ quả 6.2.11.** Nếu  $a_n$  không tiến về 0 thì  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  phân kì.

**Ví dụ 6.2.12.** Chuỗi

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{5n^2 + 4}$$

là phân kì vì số hạng của nó không dần về 0.

## 6.2.2 Chuỗi số dương

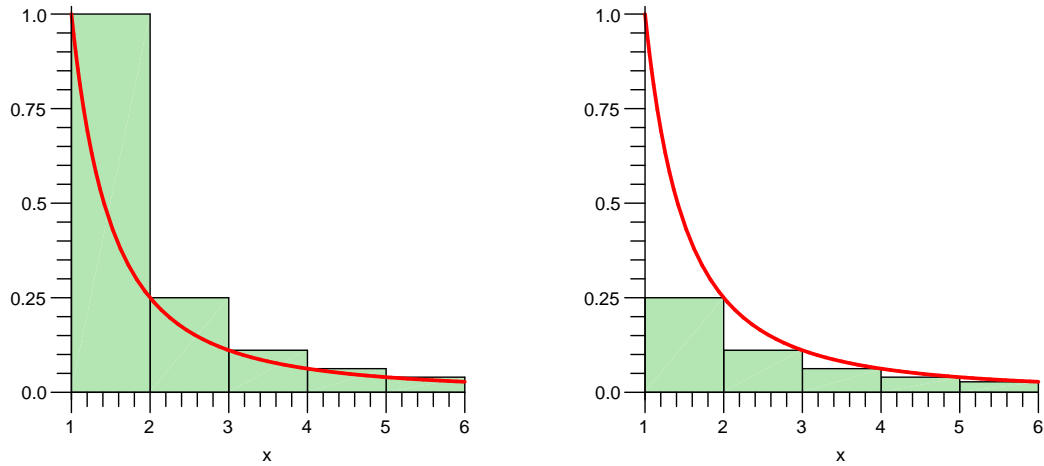
Chuỗi số  $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$  được gọi là một **chuỗi số dương** nếu tất cả các số hạng của chuỗi số đều là số dương. Trong trường hợp tất cả các số hạng đều là số không âm thì chuỗi số được gọi là chuỗi số không âm. Lưu ý rằng khi xét tính hội tụ hay phân kỳ cũng như tính tổng của chuỗi số không âm ta có thể loại bỏ ra các số hạng bằng 0, nên chuỗi số không âm cũng thường được gọi là chuỗi số dương.

**Định lý 6.2.13 (Tiêu chuẩn tích phân).** Cho  $f$  là hàm dương, giảm, liên tục trên  $[1, \infty)$ , và đặt  $a_n = f(n)$ . Chuỗi  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  là hội tụ khi và chỉ khi tích phân

$$\int_1^{\infty} f(x) dx$$

tồn tại (nghĩa là bằng một số thực).

Ý tưởng ở đây chính là ý tưởng xấp xỉ diện tích trong xây dựng tích phân.



Chú ý rằng thực ra ta chỉ cần những giả thiết trên thỏa với hàm  $f$  kể từ một giá trị  $n = N$  nào đó trở đi.

*Chứng minh.* Vì  $f$  là hàm giảm nên trên đoạn  $[i, i+1]$  thì  $a_{i+1} = f(i+1) \leq f(x) \leq f(i) = a_i$ , dẫn tới

$$a_{i+1} \leq \int_i^{i+1} f(x) dx \leq a_i.$$

Suy ra

$$\sum_{i=1}^n a_{i+1} \leq \int_1^{n+1} f(x) dx \leq \sum_{i=1}^n a_i.$$

(Xem hình minh họa ở trên.)

Nếu  $\int_1^\infty f(x) dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_1^{n+1} f(x) dx$  hội tụ về một số thực  $S$  thì dãy tổng riêng  $\sum_{i=1}^n a_{i+1}$  là dãy tăng và bị chặn trên bởi  $S$  nên phải hội tụ, do đó chuỗi  $\sum_{n=1}^\infty a_n$  là hội tụ.

Ngược lại nếu chuỗi  $\sum_{n=1}^\infty a_n$  hội tụ về số thực  $S$  thì hai tổng riêng  $\sum_{i=1}^n a_{i+1}$  và  $\sum_{i=1}^n a_i$  đều hội tụ về  $S$ , buộc dãy  $\int_1^{n+1} f(x) dx$  cũng phải hội tụ về  $S$  theo định lý kẹp, do đó  $\int_1^\infty f(x) dx = S$ .  $\square$

**Ví dụ 6.2.14.** Ta chứng tỏ với  $p > 0$  thì chuỗi  $\sum_{n=1}^\infty \frac{1}{n^p}$  là hội tụ nếu và chỉ nếu  $p > 1$ . Đây là một kết quả quan trọng thường được dùng.

Đặt  $f(x) = \frac{1}{x^p}$  với  $x > 0$  thì  $f$  thỏa giả thiết của tiêu chuẩn tích phân. Chuỗi này là hội tụ khi và chỉ khi tích phân suy rộng sau tồn tại

$$\int_1^\infty \frac{1}{x^p} dx.$$

Tính trực tiếp cho thấy tích phân này tồn tại khi và chỉ khi  $p > 1$ .

Vậy chuỗi điều hòa

$$\sum_{n=1}^\infty \frac{1}{n}$$

là phân kì.

Chuỗi

$$\sum_{n=1}^\infty \frac{1}{n^2}$$

là hội tụ.

**Định lý 6.2.15 (Tiêu chuẩn so sánh).** Cho  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  và  $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$  là các chuỗi dương và  $a_n \leq b_n$  với mọi  $n \in \mathbb{N}$ .

(a) Nếu  $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$  hội tụ thì  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  hội tụ.

(b) Nếu  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  phân kì thì  $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$  phân kì.

*Chứng minh.* Nhận xét rằng dãy các tổng riêng  $(S_n)_n$  của chuỗi số dương là dãy tăng nên chuỗi số hội tụ khi và chỉ khi dãy  $(S_n)_n$  bị chặn trên.  $\square$

**Ví dụ 6.2.16.** Chuỗi  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n2^n}$  hội tụ do  $\frac{1}{n2^n} < \frac{1}{2^n}$  và  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n}$  hội tụ.

Chuỗi  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}$  phân kì do  $\frac{1}{\sqrt{n}} > \frac{1}{n}$  và  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$  phân kì.

**Định lý 6.2.17 (Tiêu chuẩn so sánh ở dạng giới hạn).** Cho  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  và  $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$  là các chuỗi dương. Nếu tồn tại  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = L$  với  $0 < L < \infty$  thì  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  và  $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$  cùng hội tụ hoặc cùng phân kì.

*Chứng minh.* Vì  $L > 0$  nên có  $\epsilon$  sao cho  $0 < \epsilon < L$ . Với  $n$  đủ lớn thì

$$L - \epsilon < \frac{a_n}{b_n} < L + \epsilon.$$

Vậy  $0 < (L - \epsilon)b_n < a_n < (L + \epsilon)b_n$ . Kết luận thu được từ Tiêu chuẩn so sánh.  $\square$

**Ví dụ 6.2.18.** Xét chuỗi

$$\sum_{n=6}^{\infty} \frac{n^2 - 4n - 5}{3n^3 + 5n - 7}.$$

So sánh chuỗi này với chuỗi điều hòa  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{n^2 - 4n - 5}{3n^3 + 5n - 7}}{\frac{1}{n}} = \frac{1}{3},$$

ta kết luận chuỗi này phân kì theo tiêu chuẩn so sánh ở dạng giới hạn.

**Ví dụ 6.2.19.** Xét chuỗi

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2^n}.$$

So sánh chuỗi này với chuỗi  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ , vì  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^3}{2^n} = 0$  (chẳng hạn bằng cách áp dụng qui tắc l'Hôpital) nên theo tiêu chuẩn so sánh ở dạng giới hạn chuỗi này hội tụ.

**Ví dụ 6.2.20.** Chuỗi  $\sum_{n=1}^{\infty} 2^n \sin\left(\frac{1}{4^n}\right)$  hội tụ bởi so sánh với chuỗi  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n}$  thì

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2^n \sin\left(\frac{1}{4^n}\right)}{\frac{1}{2^n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sin\left(\frac{1}{4^n}\right)}{\frac{1}{4^n}} = 1.$$

**Định lý 6.2.21 (Tiêu chuẩn d'Alembert hay Tiêu chuẩn tỷ số).** Cho chuỗi dương  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  và giả sử  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = L$ .

(a) Nếu  $L < 1$  thì chuỗi hội tụ.

(b) Nếu  $L > 1$  thì chuỗi phân kì.

*Chứng minh.* Nếu  $L < 1$  thì lấy  $c$  sao cho  $L < c < 1$ , khi đó với  $n \geq n_0$  ta có

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} < c.$$

Vì vậy

$$a_{n+1} < ca_n < \cdots < c^{n-n_0+1}a_{n_0}.$$

Vậy chuỗi  $\sum a_n$  hội tụ qua so sánh với chuỗi  $\sum c^{n-n_0}$ .

Nếu  $L > 1$  thì lấy số  $c$  sao cho  $L > c > 1$ . Khi đó với  $n \geq n_0$ :

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} > c.$$

Như trên,  $a_{n+1} > c^{n-n_0+1}a_{n_0}$ . Điều này dẫn tới  $a_{n+1}$  không tiến về 0, vậy chuỗi không hội tụ.  $\square$

**Ví dụ 6.2.22.** Chuỗi  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!}$  hội tụ vì

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n!}{(n+1)!} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n+1} = 0 < 1.$$

Chuỗi  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n}$  phân kì vì

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2^{n+1}n}{(n+1)2^n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n}{n+1} = 2 > 1.$$

**Định lý 6.2.23 (Tiêu chuẩn Cauchy hay Tiêu chuẩn căn thức).** Cho chuỗi dương

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ và giả sử } \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} = L.$$

(a) Nếu  $L < 1$  thì chuỗi hội tụ.

(b) Nếu  $L > 1$  thì chuỗi phân kì.

*Chứng minh.* Nếu  $L < 1$  ta lấy  $c$  sao cho  $L < c < 1$ , khi đó với mọi  $n \geq n_0$  thì  $\sqrt[n]{a_n} < c$ . Điều này dẫn tới  $a_n < c^n$ . Vậy chuỗi  $\sum a_n$  hội tụ qua so sánh với chuỗi  $\sum c^n$ .

Nếu  $L > 1$  thì có  $c$  sao cho  $L > c > 1$ , khi đó với mọi  $n \geq n_0$  thì  $\sqrt[n]{a_n} > c$ , tức  $a_n > c^n$ . Vậy chuỗi  $\sum a_n$  phân kì qua so sánh với chuỗi  $\sum c^n$ .  $\square$

**Ví dụ 6.2.24.** Chuỗi  $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{3n}{2n+1}\right)^n$  phân kì vì

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\left(\frac{3n}{2n+1}\right)^n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3n}{2n+1} = \frac{3}{2} > 1.$$

Chuỗi  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^n}$  hội tụ vì

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\left(\frac{1}{n}\right)^n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0 < 1.$$

### 6.2.3 Chuỗi đan dấu

**Định nghĩa 6.2.25.** Một *chuỗi đan dấu* là một chuỗi có dạng

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} a_n = a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + \dots$$

trong đó  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  là một chuỗi dương.

**Định lý 6.2.26 (Tiêu chuẩn Leibniz).** Cho một chuỗi đan dấu  $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} a_n$ . Nếu  $\forall n, a_{n+1} \leq a_n$ , tức dãy  $(a_n)_n$  là dãy giảm, và  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$ , thì chuỗi là hội tụ.

*Chứng minh.* Ta có

$$\begin{aligned} S_{2n} &= (a_1 - a_2) + (a_3 - a_4) + \dots + (a_{2n-1} - a_{2n}) \\ &= a_1 - (a_2 - a_3) - (a_4 - a_5) - \dots - (a_{2n-2} - a_{2n-1}) - a_{2n}. \end{aligned}$$

Do đó dãy  $(S_{2n})_{n \geq 1}$  là dãy không âm, tăng, và bị chặn trên bởi  $a_1$ . Vậy nó hội tụ.

Vì  $S_{2n+1} = S_{2n} + a_{2n+1}$  nên  $S_{2n}$  hội tụ về cùng giới hạn với  $S_{2n+1}$ . Từ đây ta suy ra  $S_n$  hội tụ (xem Bài tập 6.1.14).  $\square$

**Ví dụ 6.2.27.** Xét chuỗi

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots$$

Chuỗi này là đan dấu. Ta có  $1 > \frac{1}{2} > \frac{1}{3} > \dots$  và  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0$ . Vậy chuỗi này hội tụ theo Tiêu chuẩn Leibniz.

**Định nghĩa 6.2.28.** Chuỗi  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  là *hội tụ tuyệt đối* nếu chuỗi  $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$  hội tụ.

**Ví dụ 6.2.29.** Chuỗi  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots$  không hội tụ tuyệt đối vì  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n}$  hội tụ và  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$  phân kì.

**Mệnh đề 6.2.30.** Chuỗi hội tụ tuyệt đối thì hội tụ.

*Chứng minh.* Ta viết

$$\sum (a_n + |a_n|) \leq 2 \sum |a_n|.$$

Vế trái là một chuỗi không âm, còn vế phải là một chuỗi hội tụ, nên theo tiêu chuẩn so sánh chuỗi ở vế trái phải hội tụ. Chú ý rằng

$$\sum a_n = \left( \sum (a_n + |a_n|) \right) - \left( \sum |a_n| \right),$$

ở đó vế phải là hiệu của hai chuỗi hội tụ, do đó chuỗi ở vế trái phải hội tụ.  $\square$

## Bài tập

**6.2.1.** Xét sự hội tụ của các chuỗi sau.

(a)

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{100}\right)^n.$$

(b)

$$\sum_{n=1}^{\infty} (1 + \cos 1)^n.$$

(c)

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sin \frac{\pi}{n^2}$$

(d)

$$\sum_{n=2}^{\infty} \left(1 - \frac{1}{n}\right)^n$$

(e)

$$\frac{1}{2 \ln 3} + \frac{1}{3 \ln 4} + \frac{1}{4 \ln 5} + \dots$$

(f)

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{(n+1)(n+2)}}$$

(g)

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n(n+1)(n+2)}}$$

(h)

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[3]{n(n+1)}}$$

(i)

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt[3]{n}}{(n+1)\sqrt{n+2}}$$

(j)

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\sqrt{n+2} - \sqrt{n-2}}{n+1}$$

(k)

$$\sum_{n=1}^{\infty} (\sqrt[3]{3} - 1)$$

(l)

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n + 1}{3^n - 2}$$

(m)

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4n+1}{7n+2}$$

(n)

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^4}{e^n}$$

(o)

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2 \cdot 5 \cdot 8 \cdots (3n-1)}{1 \cdot 5 \cdot 9 \cdots (4n-3)}$$

(p)

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n-1)}{4 \cdot 8 \cdot 12 \cdots 4n}$$

(q)

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+2^n}{1+3^n}.$$

(r)

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!^2}{(2n)!}.$$

(s)

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^n}.$$

(t)

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n+1}{2n+3}\right)^n.$$

(u)

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n-1}{3n+1}\right)^{2n+1}.$$

(v)

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n \ln n}.$$

(w)

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n \ln^2 n}.$$

(x)

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a^n}{n!}, a > 0.$$

(y)

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a^n n!}{n^n}, a > 0.$$

**6.2.2.** Hãy viết số thập phân  $1,73737373\dots$  dưới dạng phân số.

**6.2.3.** Xét sự hội tụ và hội tụ tuyệt đối của các chuỗi sau.

(a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}(n+2)}{2n^2 - 7n + 6}.$	(e) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}n}{e^{n^2}}.$
(b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt[3]{n(n+1)}}.$	(f) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^2 \cos n\pi}{1 + n^4}.$
(c) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}(n+2)3^{n-1}}{5^n}.$	(g) $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{\ln n}{n}.$
(d) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}(n+2)}{2n^2 - 7n + 6}.$	(h) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-3)^n (n!)^2}{(2n)!}.$

**6.2.4. \***

(a) Năm 1910 Srinivasa Ramanujan cho công thức sau cho  $\pi$ :

$$\frac{1}{\pi} = \frac{2\sqrt{2}}{9801} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(4k)!(1103 + 26390k)}{(k!)^4 396^{4k}} \quad (6.2.1)$$

Chúng tỏ chuỗi ở vế phải của (6.2.1) là hội tụ.

(b) Một trong những phương pháp nhanh nhất để tính  $\pi$  bằng siêu máy tính hiện nay dùng công thức

$$\frac{1}{\pi} = 12 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k (6k)!(13591409 + 545140134k)}{(3k)!(k!)^3 640320^{3k+3/2}} \quad (6.2.2)$$

Chúng tỏ chuỗi ở vế phải của công thức (6.2.2) hội tụ.

(c) Hãy viết và chạy một đoạn lệnh máy tính để tính  $\pi$  tới 1000 chữ số thập phân.

## 6.3 Chuỗi Taylor và chuỗi Maclaurin

Cho một dãy hàm số thực  $\{u_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  có cùng một miền xác định, ta gọi

$$u_1 + u_2 + \cdots + u_n + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} u_n,$$

với ý nghĩa

$$\left( \sum_{n=1}^{\infty} u_n \right) (x) = (u_1 + u_2 + \cdots)(x) = u_1(x) + u_2(x) + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x),$$

là một **chuỗi hàm**. Như vậy giá trị của một chuỗi hàm tại một điểm là một chuỗi số. Một chuỗi hàm là tổng của một dãy hàm.

**Ví dụ 6.3.1.** Đây là một chuỗi hàm

$$1 + x + x^2 + x^3 + \cdots + x^n + \cdots$$

với biến  $x \in \mathbb{R}$ .



**Định lý 6.3.2.** Nếu hàm  $f$  có đạo hàm đến cấp  $n + 1$  trong một khoảng mở chứa  $a$  và  $x$  thì có **công thức Taylor**:

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x - a) + \frac{f''(a)}{2!}(x - a)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x - a)^n + \frac{f^{(n+1)}(\theta)}{(n + 1)!}(x - a)^{n+1}. \quad (6.3.1)$$

trong đó  $\theta$  là một số thực thuộc khoảng giữa  $a$  và  $x$ . Trong trường hợp riêng  $a = 0$  thì công thức Taylor thường được gọi là **công thức Maclaurin**:

$$f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \frac{f'''(0)}{3!}x^3 \dots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + \frac{f^{(n+1)}(\theta)}{(n + 1)!}x^{n+1} \quad (6.3.2)$$

với  $\theta$  là một số thực thuộc khoảng giữa  $0$  và  $x$ .

Với  $n = 0$ , công thức Taylor chính là công thức trong Định lý giá trị trung bình 4.1.10. Với  $n = 1$ , công thức Taylor cho xấp xỉ tuyến tính (4.2.3)

$$f(x) - f(a) \approx f'(a)(x - a)$$

hơn nữa còn cho công thức chính xác cho sai số của xấp xỉ này là  $\frac{f''(\theta)}{2!}(x - a)^2$ .

Đặt

$$P_n(x) = f(a) + f'(a)(x - a) + \frac{f''(a)}{2!}(x - a)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x - a)^n$$

thì đây là một đa thức bậc  $n$  xấp xỉ hàm  $f$ . Định lý 6.3.1 trên khẳng định rằng phần dư, hay sai số của phép xấp xỉ, là

$$R_n(x) = f(x) - P_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\theta)}{(n + 1)!}(x - a)^{n+1}.$$

Đây thường được gọi là phần dư dạng Lagrange. Phần dư  $R_n(x)$  còn được hiểu là  $R_n(x) = o((x - a)^n)$  với kí hiệu  $o((x - a)^n)$  được dùng để chỉ một “vô cùng bé” cấp cao hơn  $(x - a)^n$ .

Chuỗi

$$f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x - a) + \frac{f''(a)}{2!}(x - a)^2 + \frac{f'''(a)}{3!}(x - a)^3 + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x - a)^n \quad (6.3.3)$$

được gọi là **chuỗi Taylor** cho hàm  $f$  tại  $a$  (hay quanh  $a$ , hay tâm  $a$ ). Trường hợp đặc biệt  $a = 0$  chuỗi Taylor trở thành **chuỗi Maclaurin**:

$$f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \frac{f'''(0)}{3!}x^3 + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n \quad (6.3.4)$$

*Chứng minh Định lý 6.3.1.* Ta chứng minh bằng qui nạp toán học.

Khi  $n = 0$ , công thức Taylor chính là công thức trong Định lý giá trị trung bình Lagrange, như đã nói ở trên.

Giả sử công thức Taylor đúng với  $n = k - 1$ , nghĩa là với mọi hàm  $f$  có đạo hàm tới cấp  $k - 1$  tồn tại  $\theta$  ở khoảng giữa  $a$  và  $x$  để phần dư  $R_{k-1}(x)$  của hàm  $f$ , trong phần tiếp theo được kí hiệu là  $R_{k-1}(x, f)$  cho rõ hơn, được cho bởi

$$R_{k-1}(x, f) = \frac{f^{(k)}(\theta)}{k!}(x - a)^k.$$

Ta xét  $n = k$ . Theo công thức Cauchy về giá trị trung bình (4.1.1), tồn tại  $c$  trong khoảng  $a$  và  $x$  để

$$\frac{R_k(x, f)}{(x-a)^{k+1}} = \frac{R_k(x, f) - R_k(a, f)}{(x-a)^{k+1} - (a-a)^{k+1}} = \frac{R'_k(c, f)}{(k+1)(c-a)^k}. \quad (6.3.5)$$

Ta thu được bằng tính toán trực tiếp:

$$R'_k(x, f) = f'(x) - [f'(a) + f''(a)(x-a) + \dots + \frac{f^{(k)}(a)}{(k-1)!}(x-a)^{k-1}] = R_{k-1}(x, f').$$

Áp dụng giả thiết qui nạp cho hàm  $f'$ , tồn tại  $\theta$  ở giữa  $a$  và  $c$  sao cho

$$R'_k(c, f) = R_{k-1}(c, f') = \frac{f^{(k)}(\theta)}{k!}(c-a)^k.$$

Thay vào (6.3.5) ta thu được

$$R_k(x, f) = \frac{f^{(k+1)}(\theta)}{(k+1)!}(x-a)^{k+1}.$$

Vậy công thức phần dư đúng khi  $n = k$ . □

Viết ra công thức Taylor của một hàm thường được gọi là viết khai triển Taylor của hàm đó.

**Ví dụ 6.3.3.** Tìm khai triển Maclaurin của hàm số  $f(x) = \frac{1}{1+x}$ .

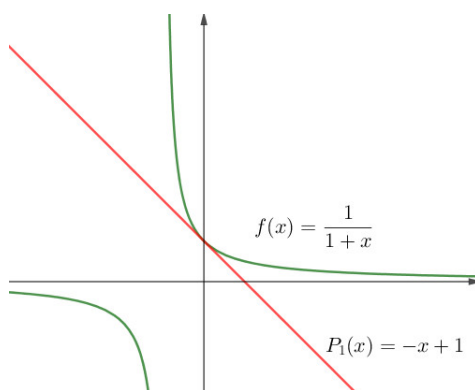
Ta tìm được

$$\left(\frac{1}{1+x}\right)^{(n)} = (-1)^n \frac{n!}{(1+x)^{n+1}},$$

do đó  $f(0) = 1, f'(0) = -1, \dots, f^{(n)}(0) = (-1)^n n!$ . Khai triển Maclaurin của  $f$  là

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - \dots + (-1)^n x^n + (-1)^{n+1} \frac{1}{(1+\theta)^{n+1}} x^{n+1},$$

với  $\theta$  là một số thực nào đó nằm giữa  $x$  và  $0$ .

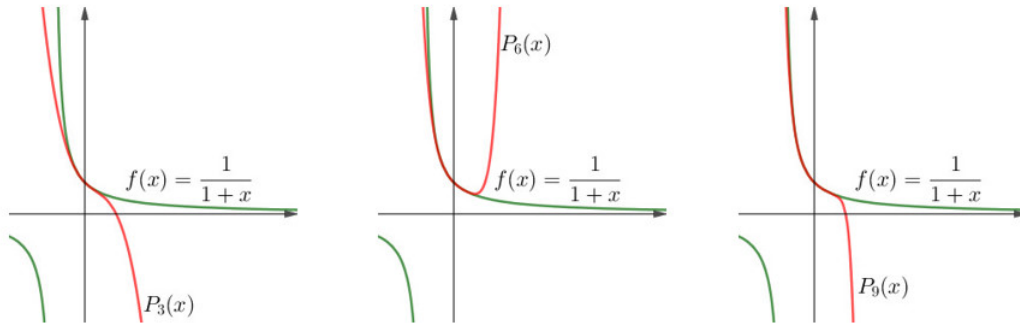


Hình 6.3.1:  $P_1$  là xấp xỉ tuyến tính của hàm số  $\frac{1}{1+x}$  tại  $x = 0$ .

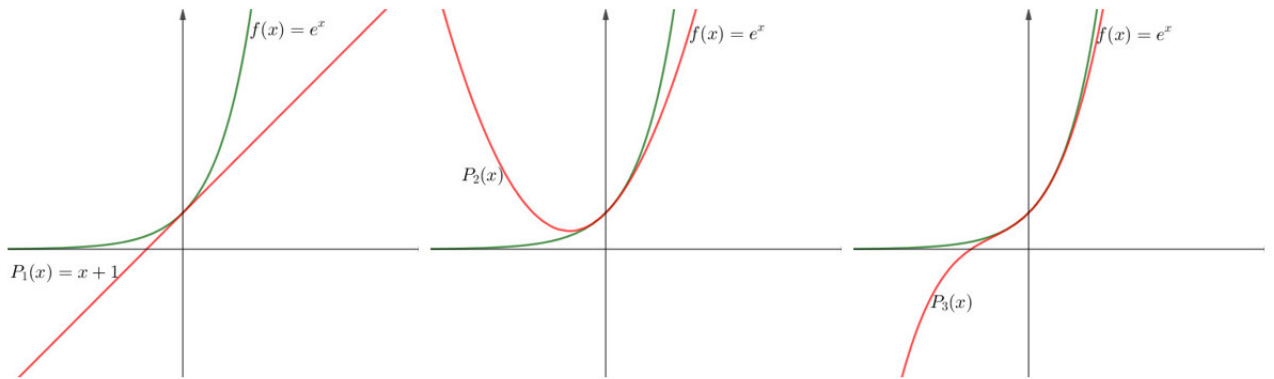
**Ví dụ 6.3.4.** Tìm khai triển Maclaurin của hàm số  $e^x$ .

Ta có

$$(e^x)^{(n)} = e^x,$$



Hình 6.3.2: Hàm số  $f(x) = \frac{1}{1+x}$  và các đa thức xấp xỉ  $P_n$  tại  $x = 0$ .



Hình 6.3.3: Hàm số  $e^x$  và các đa thức xấp xỉ  $P_n$  tại  $x = 0$ .

do đó  $f(0) = 1, f'(0) = 1, \dots, f^{(n)}(0) = 1$ . Khai triển Maclaurin của  $f$  là

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + \frac{e^\theta}{(n+1)!}x^{n+1},$$

với  $\theta$  là một số thực nào đó nằm giữa  $x$  và  $0$ .

Ta có thể đi xa hơn. Với mỗi  $x \in \mathbb{R}$  ta có đánh giá phần dư:

$$|R_n(x)| = \left| \frac{e^\theta}{(n+1)!}x^{n+1} \right| < \frac{e^{|x|}}{(n+1)!} |x|^{n+1}.$$

Vì

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x^n}{n!} = 0$$

(Mệnh đề 6.1.9) nên theo nguyên lí kẹp  $\lim_{n \rightarrow \infty} R_n(x) = 0$ . Điều này có nghĩa là chuỗi Maclaurin của  $e^x$  hội tụ về  $e^x$  với mọi  $x$ . Nói cách khác công thức sau đúng với mọi  $x$ :

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \dots + \frac{x^n}{n!} \dots$$

Bằng phương pháp trong ví dụ trên ta có thể kiểm tra được sự hội tụ của các khai triển Taylor trong mệnh đề sau.

**Mệnh đề 6.3.5.** Khai triển Maclaurin của một số hàm thường gặp:

(a) Với mọi  $x \in \mathbb{R}$  thì

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \dots + (-1)^{m-1} \frac{x^{2m-1}}{(2m-1)!} + \dots$$

(b) Với mọi  $x \in \mathbb{R}$  thì

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \dots + (-1)^m \frac{x^{2m}}{(2m)!} + \dots$$

(c) Với  $|x| < 1$  và  $x = 1$  thì

$$\arctan x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \dots + (-1)^{m-1} \frac{x^{2m-1}}{2m-1} + \dots$$

(d) Với mọi  $x \in \mathbb{R}$  thì

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + \dots$$

(e) Với  $|x| < 1$  và  $x = 1$  thì

$$\ln(x+1) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \dots + (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n} + \dots$$

(f) Với  $|x| < 1$ ,  $\alpha \in \mathbb{R}$ ,  $C_\alpha^k = \frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-k+1)}{k!}$  thì

$$(1+x)^\alpha = 1 + C_\alpha^1 x + C_\alpha^2 x^2 + \dots + C_\alpha^n x^n + \dots$$

Ta có thể dùng khai triển Taylor và Maclaurin để tính xấp xỉ giá trị của số  $f(x)$  sau khi chọn  $n$  đủ lớn để phần dư  $R_n(x)$  có trị tuyệt đối không vượt quá sai số cho phép.

**Ví dụ 6.3.6.** Tính  $e$  chính xác đến 0,00001.

Dùng khai triển Maclaurin của hàm số  $e^x$  ta được

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} e^\theta$$

với  $\theta$  giữa 0 và  $x$ . Khi  $x = 1$  ta được công thức

$$e = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \dots + \frac{1}{n!} + \frac{1}{(n+1)!} e^\theta$$

với  $\theta$  giữa 0 và 1. Ta cần đảm bảo giá trị tuyệt đối của sai số  $\frac{1}{(n+1)!} e^\theta$  không vượt quá 0,00001 bằng cách lấy  $n$  đủ lớn. Vì  $0 < \frac{1}{(n+1)!} e^\theta < \frac{e}{(n+1)!}$  nên ta chỉ cần chọn  $n$  đủ lớn sao cho  $\frac{e}{(n+1)!} < 10^{-5}$  hay  $(n+1)! > e \cdot 10^5$ . Ta có thể chọn  $n = 8$  và thu được

$$e \approx 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \dots + \frac{1}{8!} = 2,71828\dots$$

**Ví dụ 6.3.7.** Tính  $\sin 20^\circ$  chính xác đến 0,0001.

Chú ý  $\sin 20^\circ = \sin \frac{\pi}{9}$ . Dùng khai triển Maclaurin của hàm  $\sin$ , lấy  $x = \frac{\pi}{9}$ , chọn  $n = 3$ , ta đánh giá được phần dư Lagrange

$$|R_3(x)| \leq \frac{1}{5!} \left(\frac{\pi}{9}\right)^5 < 0,0001.$$

Vậy  $\sin 20^\circ \approx \frac{\pi}{9} - \frac{1}{3!} \left(\frac{\pi}{9}\right)^3 \approx 0,34197\dots$

Sau đây là một ví dụ khai triển Taylor tại một điểm khác 0.

**Ví dụ 6.3.8.** Viết công thức Taylor của hàm  $f(x) = e^x$  quanh điểm  $a = 2$  đến cấp  $n$ .

Ta có  $f^{(n)}(2) = e^2$ . Vậy

$$e^x = e^2 + e^2(x-2) + \frac{e^2}{2!}(x-2)^2 + \dots + \frac{e^2}{n!}(x-2)^n + \frac{e^\theta}{(n+1)!}(x-2)^{n+1}.$$

## Bài tập

**6.3.1.** Hãy tìm xấp xỉ bình phương (nghĩa là  $n = 2$  trong khai triển Taylor) của hàm số  $\sqrt{1+x^2}$  tại  $x = 0$ .

**6.3.2.** Hãy tìm xấp xỉ lập phương (nghĩa là  $n = 3$  trong khai triển Taylor) của hàm số  $\sqrt[3]{\sin x + x^2}$  tại  $x = 0$ .

**6.3.3.** Tìm khai triển Maclaurin của các hàm số sau.

(a)  $f(x) = (1-x)^{-2}$ .

(b)  $f(x) = \sin \pi x$ .

(c)  $f(x) = e^{-2x}$ .

(d)  $f(x) = 2^x$ .

(e)  $f(x) = x \cos x$ .

**6.3.4.** Tìm khai triển Taylor của các hàm số sau tại các điểm  $a$  tương ứng.

(a)  $f(x) = x^4 - 3x^2 + 1, \quad a = 1$ .

(b)  $f(x) = x - x^3, \quad a = -2$ .

(c)  $f(x) = \ln x, \quad a = 2$ .

(d)  $f(x) = 1/x, \quad a = -3$ .

(e)  $f(x) = e^{2x}, \quad a = 3$ .

(f)  $f(x) = \sin x, \quad a = \pi/2$ .

(g)  $f(x) = \cos x, \quad a = \pi$ .

(h)  $f(x) = \sqrt{x}, \quad a = 16$ .

**6.3.5.** Dùng xấp xỉ  $\sin x \approx x - \frac{x^3}{6}$  để tính  $\sin(0,1)$ . Hãy ước lượng sai số.

**6.3.6.** Cho hàm số  $f(x) = \sqrt{x^5 + 4}$ .

(a) Viết khai triển Taylor của hàm số  $f$  tới cấp 3 quanh điểm  $x = 2$ .

(b) Áp dụng, hãy tính gần đúng số  $\sqrt{2,001^5 + 4}$ .

**6.3.7.** Hãy tính gần đúng giá trị  $\cos 91^\circ$  bằng Khai triển Taylor cấp 5.

**6.3.8.** Hãy tính gần đúng giá trị  $\cos 61^\circ$ , với sai số so với giá trị chính xác không vượt quá  $10^{-6}$ .

**6.3.9.** Chứng tỏ khai triển Taylor của  $\ln x$  tại 1 là

$$\frac{(x-1)}{1} - \frac{(x-1)^2}{2} + \frac{(x-1)^3}{3} - \dots = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{(x-1)^n}{n}$$

với  $0 < x < 2$ . Hãy vẽ đồ thị của hàm  $\ln$  và đồ thị của tổng 5 số hạng đầu của khai triển Taylor trên cùng một mặt phẳng tọa độ và nhận xét.

# Chương 7

## Phương trình vi phân

### 7.1 Phương trình vi phân và mô hình toán học

Con người xây dựng những mô hình toán học về các hiện tượng trong thế giới rồi cố gắng khảo sát các mô hình đó để hiểu về các hiện tượng. Thường các hiện tượng thay đổi theo thời gian và không gian, vì thế các mô hình thường chứa các đạo hàm để đo tốc độ thay đổi. Các mô hình như thế thường dẫn tới những phương trình ở đó ẩn là các hàm, còn bản thân phương trình thì chứa các đạo hàm. Những phương trình như thế được gọi là những phương trình vi phân.

**Ví dụ 7.1.1.** Đây là một phương trình vi phân:

$$y' = y.$$

Giải phương trình này nghĩa là tìm một hàm  $y$  mà đạo hàm  $y'$  bằng  $y$ . Nói cách khác, tìm hàm  $y$  theo biến  $x$  sao cho với mọi  $x$  thì  $y'(x) = y(x)$ .

Ta có thể kiểm được ngay là hàm  $y = e^x$  là một nghiệm của phương trình vi phân trên. Làm sao để giải tìm nghiệm của một phương trình vi phân là một đề tài ta sẽ khảo sát trong chương này.

Một **phương trình vi phân cấp một** là một phương trình chứa một hàm số một biến chưa biết và đạo hàm cấp một của hàm số đó. Nói một cách khác, đây là phương trình có dạng

$$F(x, y(x), y'(x)) = 0$$

với  $F$  là biểu thức chứa  $x, y(x)$  và  $y'(x)$ , và  $y$  là hàm số cần tìm phụ thuộc vào  $x$ .

Hàm số  $y(x)$  được gọi là nghiệm của phương trình vi phân cấp một nếu nó có đạo hàm cấp một tồn tại và thỏa đẳng thức trên. Giải phương trình vi phân cấp một là đi tìm hàm  $y$  thỏa đẳng thức trên.

Bài toán tìm nghiệm  $y$  của phương trình vi phân cấp một thỏa mãn điều kiện  $y(x_0) = y_0$ , với  $x_0$  và  $y_0$  cho trước, được gọi là một **bài toán giá trị đầu**. Như vậy đây là bài toán giải hệ

$$\begin{cases} F(x, y(x), y'(x)) = 0 \\ y(x_0) = y_0. \end{cases}$$

**Ví dụ 7.1.2.** Xét phương trình vi phân

$$y' = y.$$

Thế vào phương trình, ta kiểm được ngay không chỉ  $y = e^x$ , mà  $y = ke^x$  trong đó  $k$  là số thực bất kì, là nghiệm của phương trình vi phân.

**Ví dụ 7.1.3.** Xét bài toán giá trị đầu:

$$\begin{cases} y' = y \\ y(0) = 2. \end{cases}$$

Thay  $x = 0$  vào nghiệm  $y = ke^x$  ta được  $y(0) = k$ . Do đó để  $y(0) = 2$  thì  $k = 2$ . Vậy bài toán giá trị đầu này có một nghiệm là  $y = 2e^x$ .

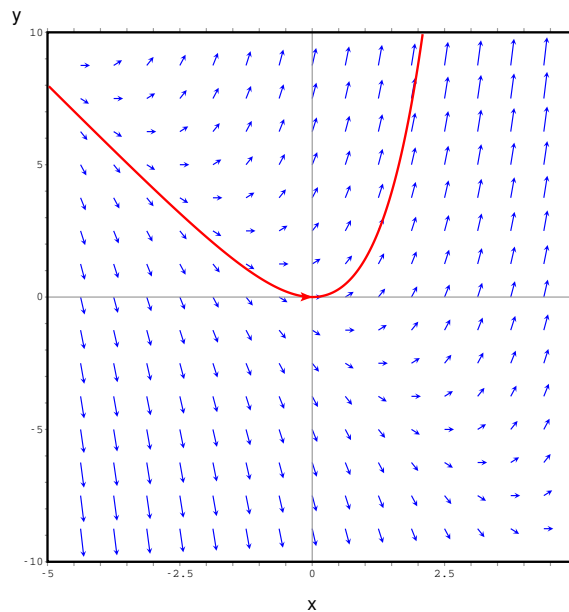
Tìm công thức nghiệm của một phương trình vi phân có thể khó. Ở các mục tiếp theo chúng ta sẽ tìm hiểu một số phương pháp tìm nghiệm của phương trình vi phân. Trong nhiều trường hợp thay vì tìm công thức của nghiệm ta tìm hiểu các tính chất của nghiệm, hay xấp xỉ nghiệm.

**Ví dụ 7.1.4.** Xét phương trình vi phân

$$y' = 2x + y.$$

Nếu đặt vế phải là  $F(x, y) = 2x + y$  thì ta có thể diễn đạt phương trình vi phân như sau: Tìm một đường cong  $y$  theo biến  $x$  mà tại mỗi điểm  $(x, y)$  thì độ nghiêng  $y'(x)$  của đường được cho bởi số thực  $F(x, y)$ . Tại mỗi điểm  $(x, y)$  trên mặt phẳng ta vẽ một vectơ có độ nghiêng bằng  $F(x, y)$ , chẳng hạn như vectơ  $(1, F(x, y))$ , thì ta được một trường vectơ ứng với phương trình vi phân. Đường cong nghiệm phải luôn tiếp xúc với các vectơ của trường vectơ này tại điểm mà đường cong đi qua, vì cả hai có cùng độ nghiêng.

Cách tiếp cận này có thể sử dụng được dễ dàng hơn nếu ta dùng công cụ máy tính. Hình vẽ giúp chúng ta hình dung tính chất và dáng điệu của nghiệm.



Hình 7.1.1: Trường vectơ và đường cong nghiệm của phương trình  $y' = 2x + y$  đi qua điểm  $(0, 0)$ . Đường này là đồ thị của nghiệm của phương trình vi phân với điều kiện đầu  $y(0) = 0$ .

Qua Hình 7.1.1 ta có thể quan sát thấy những tính chất chẳng hạn như nghiệm  $y$  thỏa điều kiện đầu  $y(0) = 0$  sẽ có  $y(x)$  càng lớn khi  $x$  càng lớn.

**Ghi chú 7.1.5.** Trong các bài toán giải phương trình vi phân trong tài liệu này chúng ta bằng lòng với việc tìm ra được một nghiệm nào đó của phương trình xác định trên một khoảng nào đó. Dưới những điều kiện khá tổng quát mà thường được thỏa trong tài liệu

này, với mỗi điều kiện đầu, phương trình thực sự có duy nhất một nghiệm xác định trên một khoảng nào đó. Điều này được thể hiện trong hình vẽ nghiệm của phương trình: qua mỗi điểm chỉ có một đường cong nghiệm mà thôi. Vấn đề này thường được khảo sát trong các tài liệu nâng cao hơn về môn Phương trình vi phân như [Long, Boyce09].

### 7.1.1 Mô hình với phương trình vi phân

**Ví dụ 7.1.6 (Mô hình tăng trưởng dân số).** Ta lập mô hình tăng trưởng của dân số (số lượng cá thể trong một quần thể sinh vật nào đó)  $P$  theo thời gian  $t$ .

Ta đưa ra một giả thiết là tốc độ tăng dân số tỉ lệ hằng với qui mô dân số, nói cách khác tốc độ tăng tương đối là một hằng số. Ví dụ nếu cứ mỗi 100 người trong một năm có 3 trẻ được sinh ra và 1 người chết đi thì tốc độ tăng dân số tương đối là 2 người trên mỗi 100 người mỗi năm, tức là 2%/năm, và ta giả sử tốc độ này không thay đổi theo thời gian.

Tốc độ tăng trưởng dân số theo thời gian chính là đạo hàm  $\frac{dP}{dt}$ . Tốc độ tăng trưởng tương đối là

$$\frac{\frac{dP}{dt}}{P},$$

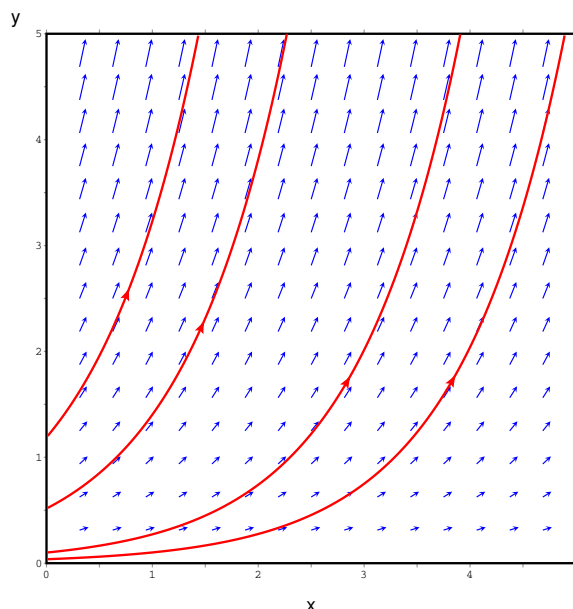
vậy mô hình là

$$\frac{dP}{P} = k,$$

trong đó  $k$  là hằng số tỉ lệ, độc lập với thời gian, hay

$$\frac{dP}{dt} = kP. \quad (7.1.1)$$

Phương trình (7.1.1) là một mô hình đơn giản nhưng hiệu quả về sự tăng trưởng số lượng của quần thể.



Hình 7.1.2: Một số nghiệm của phương trình dân số  $P(t) = P_0 e^{kt}$  ứng với  $k = 1$  và những giá trị khác nhau của  $P_0$ .

Nếu  $k > 0$  thì  $\frac{dP}{dt}$  luôn dương, nên dân số luôn tăng. Hơn nữa khi  $P$  càng lớn thì  $\frac{dP}{dt}$  càng lớn, nghĩa là dân số càng lớn thì tăng càng nhanh. Như vậy mô hình dân số (7.1.1)



phù hợp với những tình huống mà sự phát triển của dân số không bị hạn chế bởi lương thực, sự tấn công của kẻ địch, bệnh dịch, ...

Nếu  $k = 0$  thì  $\frac{dP}{dt}$  luôn bằng 0, do đó  $P$  bằng một hằng số. Vậy dân số không đổi. Một nghiệm hằng như vậy của phương trình vi phân còn được gọi là một **nghiệm cân bằng**.

Nếu  $k < 0$  thì  $\frac{dP}{dt}$  luôn âm, nên dân số luôn giảm.

Phương trình này được giải ở Ví dụ 7.2.2, còn lúc này ta có thể dễ dàng kiểm tra bằng cách thế vào rằng phương trình có một nghiệm là

$$P(t) = P_0 e^{kt}.$$

Trong đó  $P_0 = P(0)$  là dân số tại thời điểm 0, tức là dân số ban đầu. Xem Hình 7.1.2.

Mô hình tăng trưởng dân số cũng áp dụng được cho các trường hợp khác mà tốc độ thay đổi của đại lượng tỉ lệ với giá trị của đại lượng, như mô hình lãi nhập vốn (Bài tập 7.2.8), mô hình phân rã mũ (Bài tập 7.2.9).

**Ví dụ 7.1.7 (Mô hình tăng trưởng dân số có kìm hãm).** Thường khi dân số của một cộng đồng tăng lên thì những yếu tố kìm hãm xuất hiện như hạn chế về lương thực, tài nguyên, sự cạnh tranh của các cộng đồng khác, ... Trong trường hợp này thì tốc độ tăng trưởng dân số tương đối sẽ không phải là một hằng số. Một mô hình đơn giản là tốc độ tăng trưởng dân số tương đối sẽ phụ thuộc vào chính dân số:

$$\frac{P'}{P} = h(P).$$

Đơn giản hơn nữa ta lấy  $h$  là một hàm cấp 1:

$$h(P) = r \left( 1 - \frac{P}{K} \right),$$

trong đó  $r, K$  là các hằng số dương. Vậy ta có mô hình

$$\frac{P'}{P} = r \left( 1 - \frac{P}{K} \right), \quad (7.1.2)$$

còn được gọi là **mô hình hậu cần**.

Quan sát mô hình hậu cần ta thấy nếu  $P < K$  thì  $P' > 0$ , như vậy dân số sẽ tăng. Tuy nhiên khi  $P$  càng lớn thì  $(1 - \frac{P}{K})$  sẽ càng nhỏ, tuy vẫn là số dương. Như vậy khi dân số lớn lên thì tốc độ tăng trưởng tương đối sẽ giảm đi, đúng như ta muốn miêu tả. Phương trình có một nghiệm hằng  $P(t) = K$ , được gọi là nghiệm cân bằng. Giá trị  $K$  được coi là **mức trần của môi trường**, nếu dân số khởi đầu ở một mức thấp hơn thì dân số không thể tăng vượt qua mức này.

Trong mục sau ta sẽ giải phương trình hậu cần ở Ví dụ 7.2.3. Hiện giờ ta có thể kiểm tra rằng phương trình có một nghiệm là

$$P(t) = \frac{K}{1 + e^{-rt+C}},$$

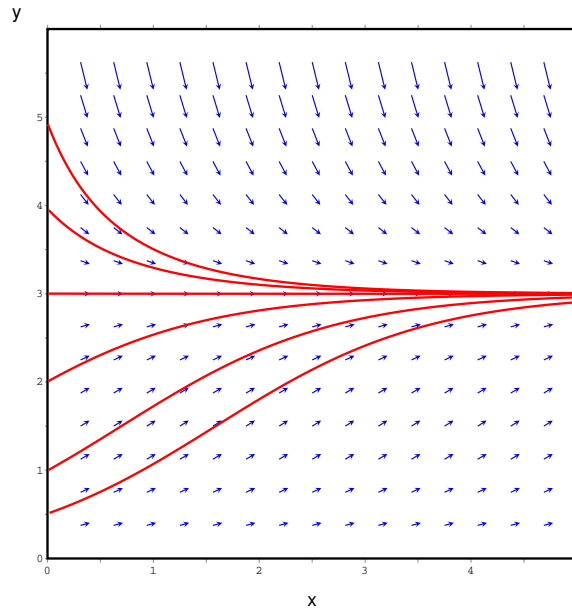
với  $C \in \mathbb{R}$ . Ở Hình 7.1.3 ta thấy nghiệm có những tính chất như dự đoán từ mô hình.

## Bài tập

**7.1.1.** Kiểm tra rằng  $y = \frac{2}{3}e^x + e^{-2x}$  là một nghiệm của phương trình vi phân  $y' + 2y = 2e^x$ .

**7.1.2.** Kiểm tra rằng  $y = -t \cos t - t$  là một nghiệm của bài toán giá trị đầu

$$t \frac{dy}{dt} = y + t^2 \sin t, \quad y(\pi) = 0.$$



Hình 7.1.3: Một số nghiệm của phương trình hậu cần với  $r = 1$ ,  $K = 3$  và những điều kiện đầu khác nhau. Nghiệm  $P = K$  là nghiệm cân bằng, có đồ thị là một đường thẳng nằm ngang. Các nghiệm mà có giá trị đầu nhỏ hơn  $K$  khi thời gian lớn hơn tăng gần tới nhưng không đạt giá trị  $K$ . Các nghiệm mà có giá trị đầu lớn hơn  $K$  khi thời gian lớn hơn giảm gần tới nhưng không đạt giá trị  $K$ .

**7.1.3.** Xét phương trình vi phân  $x^2y' + xy = 1$ .

- Kiểm tra rằng mọi phần tử của họ các hàm số  $y = (\ln x + C)/x$  đều là nghiệm của phương trình.
- Tìm một nghiệm của phương trình vi phân thỏa mãn điều kiện ban đầu  $y(1) = 2$ .
- Tìm một nghiệm của phương trình vi phân thỏa mãn điều kiện ban đầu  $y(2) = 1$ .

**7.1.4.** Xét phương trình vi phân  $y' = -y^2$ .

- Hãy kiểm tra rằng tất cả các phần tử của họ  $y = 1/(x + C)$  đều là nghiệm của phương trình.
- Hãy tìm một nghiệm của bài toán giá trị ban đầu

$$y' = -y^2, \quad y(0) = 0,5.$$

**7.1.5.** Xét phương trình vi phân  $y' = xy^3$ .

- Hãy kiểm tra rằng tất cả phần tử của họ  $y = (c - x^2)^{-1/2}$  đều là nghiệm.
- Hãy vẽ đồ thị nhiều phần tử của họ các nghiệm trên cùng một mặt phẳng.
- Hãy tìm một nghiệm của bài toán giá trị ban đầu

$$y' = xy^3, \quad y(0) = 2.$$

**7.1.6.** Một dân số được mô hình bởi phương trình vi phân theo mô hình tăng trưởng có kìm hãm

$$\frac{dP}{dt} = 1,2P \left( 1 - \frac{P}{4200} \right).$$

- Với những giá trị nào của  $P$  thì dân số tăng theo thời gian?
- Với những giá trị nào của  $P$  thì dân số giảm theo thời gian?
- Những nghiệm nào là nghiệm cân bằng (nghiệm hằng, dân số không đổi theo thời gian)?

**7.1.7 (Mô hình của sự nguội).** Người ta đưa ra một quan sát rằng tốc độ nguội của một vật tỉ lệ với sự chênh lệch nhiệt độ giữa vật đó với môi trường xung quanh (đây là một định luật của I. Newton).

- (a) Một ấm nước vừa sôi ở nhiệt độ  $100^\circ C$  được để nguội trong một phòng có nhiệt độ  $26^\circ C$ . Hãy viết một phương trình vi phân miêu tả nhiệt độ của ấm nước để nguội phù hợp với quan sát này.
- (b) Hãy vẽ phác họa đồ thị nghiệm của bài toán giá trị ban đầu ở phần (a).

**7.1.8 (Mô hình của sự học).** Đặt  $P(t)$  là lượng kiến thức tích lũy được của một người học (đo theo một cách nào đó) theo thời gian  $t$ . Đạo hàm  $dP/dt$  cho tốc độ tăng của lượng kiến thức tích lũy, thể hiện tốc độ tiến bộ của người học. Có quan sát rằng kiến thức tích lũy được tăng theo thời gian, nhưng với tốc độ giảm dần, và không thể vượt quá một mức trần  $M$  nhất định.

- (a) Hãy giải thích vì sao phương trình vi phân

$$\frac{dP}{dt} = k(M - P),$$

với  $k$  là một hằng số, là phù hợp với quan sát trên.

- (b) Hãy vẽ phác họa một nghiệm của phương trình vi phân này dựa theo mô hình trên.

## 7.2 Giải phương trình vi phân cấp một

### 7.2.1 Phương trình vi phân cấp một tách biến

Một *phương trình vi phân cấp một tách biến*, còn được gọi là phương trình vi phân cấp một biệt số phân li, là một phương trình vi phân cấp một mà trong đó biểu thức cho  $dy/dx$  có thể được phân tích thành một hàm của  $x$  nhân với một hàm của  $y$ . Cụ thể hơn, đó là phương trình có dạng

$$\frac{dy}{dx} = g(x)f(y).$$

Đối với phương trình như vậy ta có thể đưa hết hàm của  $x$  về một vế và hàm của  $y$  về vế còn lại, tức là tách biến.

**Ví dụ 7.2.1.** Giải phương trình

$$y' = y.$$

Viết lại phương trình ở dạng

$$\frac{dy}{dx} = y.$$

Đưa về dạng  $y$  ở một bên,  $x$  ở một bên (tách biến):

$$\frac{dy}{y} = dx.$$

Lấy tích phân hai vế:

$$\int \frac{dy}{y} dy = \int dx$$

ta được

$$\ln |y| = x + C,$$

tức là

$$|y| = e^{x+C} = e^C e^x.$$

Vì  $y$  là hàm khả vi liên tục nên hoặc  $y = e^C e^x$  hoặc  $y = -e^C e^x$ . Kết hợp hai trường hợp, cùng với trường hợp  $y = 0$ , ta có nghiệm tổng quát là

$$y = D e^x,$$

với  $D$  là một hằng số thực.

Cách giải chung của phương trình tách biến là như sau:

*Cách giải phương trình tách biến*

$$\frac{dy}{dx} = g(x)f(y)$$

**Bước 1:** Viết lại dưới dạng vi phân

$$h(y)dy = g(x)dx$$

ở đó tất cả  $y$  đều nằm về một vế của phương trình và tất cả  $x$  nằm về vế kia (tách biến). Ở đây  $h = \frac{1}{f}$ .

**Bước 2:** Lấy nguyên hàm hai vế:

$$\int h(y)dy = \int g(x)dx \quad (7.2.1)$$

Trong một số trường hợp ta có thể tính được tích phân rồi giải được phương trình (7.2.1) để được công thức tường minh  $y$  theo  $x$ .

Có thể giải thích cách giải này như sau. Ta viết

$$y'(x) = \frac{g(x)}{h(y)}$$

hay

$$h(y)y'(x) = g(x)$$

rồi lấy nguyên hàm cả hai vế thì được

$$\int h(y)y'(x) dx = \int g(x) dx.$$

Ở vế trái, đổi biến  $y = y(x)$  ta được

$$\int h(y) dy = \int g(x) dx.$$

**Ví dụ 7.2.2.** Giải phương trình tăng trưởng dân số (7.1.1)

$$P' = kP.$$

Bước 1: Viết

$$\frac{dP}{dt} = kP.$$

Đưa về dạng  $P$  ở một bên,  $t$  ở một bên (tách biến):

$$\frac{dP}{P} = k dt.$$

Bước 2: Lấy tích phân hai vế:

$$\int \frac{dP}{P} = \int k dt$$

ta được

$$\ln |P| = kt + C,$$

tức là

$$|P| = e^{kt+C} = e^C e^{kt}.$$

Vì  $P$  là hàm khả vi liên tục nên hoặc  $P = e^C e^{kt}$  hoặc  $P = -e^C e^{kt}$ . Kết hợp hai trường hợp ta được nghiệm

$$P = D e^{kt}, \quad D \in \mathbb{R}.$$

Chú ý rằng  $P(0) = D$ . Nếu đặt  $P_0 = P(0)$  là giá trị ban đầu của dân số thì ta viết được nghiệm là

$$P(t) = P_0 e^{kt}.$$

**Ví dụ 7.2.3.** Giải phương trình tăng trưởng dân số có kì hãm (mô hình hậu cần) (7.1.2)

$$P' = r \left( 1 - \frac{P}{K} \right) P.$$

Ta nhận thấy đây là một phương trình tách biến. Ta viết nó dưới dạng  $P$  ở một vế còn  $t$  ở vế kia:

$$\frac{dP}{\left(1 - \frac{P}{K}\right)P} = r dt.$$

Lấy nguyên hàm hai vế (giả sử  $P < K$ ):

$$\int \frac{dP}{\left(1 - \frac{P}{K}\right)P} = \int r dt.$$

Suy ra

$$\int \left( \frac{1}{K-P} + \frac{1}{P} \right) dP = rt + C,$$

với  $C \in \mathbb{R}$ . Từ đó

$$-\ln(K-P) + \ln P = rt + C,$$

hay

$$\ln \frac{P}{K-P} = rt + C,$$

vậy

$$\frac{P}{K-P} = e^{rt+C}.$$

Giải phương trình này tìm  $P$ , ta được

$$P(1 + e^{rt+C}) = K e^{rt+C},$$

vậy nghiệm là

$$P = \frac{K e^{rt+C}}{1 + e^{rt+C}} = \frac{K}{1 + e^{-rt-C}},$$

với  $C \in \mathbb{R}$ .

## 7.2.2 Phương trình vi phân cấp một đẳng cấp

Một *phương trình vi phân cấp một đẳng cấp* là một phương trình có dạng

$$y'(x) = F\left(\frac{y(x)}{x}\right),$$

hay ngắn gọn hơn

$$y' = F\left(\frac{y}{x}\right),$$

với  $F$  là một hàm một biến.

**Ví dụ 7.2.4.** Các phương trình sau có dạng đẳng cấp:

(a)  $y' = \frac{x+y}{x-y}$ , vì ta có thể viết lại như sau, với  $u = \frac{y}{x}$ :

$$y' = \frac{1 + y/x}{1 - y/x} = \frac{1 + u}{1 - u}.$$

(b)  $y' = \frac{x^2 + xy + y^2}{x^2 + y^2}$ , vì ta có thể viết lại như sau, với  $u = \frac{y}{x}$ :

$$y' = \frac{1 + y/x + (y/x)^2}{1 + (y/x)^2} = \frac{1 + u + u^2}{1 + u^2}.$$

**Ví dụ 7.2.5.** Giải phương trình sau

$$y' = \frac{y^2 + 2xy}{x^2}.$$

Ta đưa về dạng đẳng cấp như sau:

$$y' = \left(\frac{y}{x}\right)^2 + 2\frac{y}{x} = u^2 + 2u$$

với  $u = \frac{y}{x}$ ,  $x \neq 0$ . Do  $y(x) = u(x)x$ , ta tính được  $y'(x) = u'(x)x + u(x)$ . Thay vào phương trình trên ta được

$$u'x + u = u^2 + 2u,$$

tức là

$$u'x = u^2 + u.$$

Nếu  $u^2 + u = 0$ , tức  $u = 0$  hay  $u = -1$ , ta được hai nghiệm  $y = 0$  hay  $y = -x$ . Nếu  $u^2 + u \neq 0$  ta có thể đưa phương trình về dạng phương trình tách biến

$$\frac{u'}{u^2 + u} = \frac{1}{x}.$$

Ta giải phương trình tách biến như ở mục trước. Lấy nguyên hàm hai vế:

$$\int \frac{1}{u^2 + u} du = \int \frac{1}{x} dx.$$

Tính tích phân:

$$\int \frac{1}{u^2 + u} du = \int \frac{1}{u(u+1)} du = \int \left(\frac{1}{u} - \frac{1}{u+1}\right) du = \ln|u| - \ln|u+1| = D + \ln|x|.$$

Viết  $D = \ln C$ ,  $C > 0$ , ta thu được

$$\left| \frac{u}{u+1} \right| = C|x|.$$

Trên mỗi khoảng xác định  $x \neq 0$  ta xét phương trình

$$\frac{u}{u+1} = Cx,$$

với một hằng số  $C \in \mathbb{R}$  (nếu dùng một lí luận nâng cao hơn từ tính liên tục của  $u$  có thể thấy được đây là khả năng duy nhất). Giải phương trình này ta được

$$u = \frac{Cx}{1 - Cx}.$$

Thay  $u$  bởi  $\frac{y}{x}$ , ta được một nghiệm là

$$y(x) = \frac{Cx^2}{1 - Cx}, \quad C \in \mathbb{R}.$$

Tổng kết lại, để giải phương trình đẳng cấp ta làm như sau:

**Cách giải phương trình đẳng cấp**

$$y' = F\left(\frac{y}{x}\right)$$

**Bước 1:** Đặt  $u = \frac{y}{x}$  hay  $y(x) = u(x)x$ , do công thức đạo hàm của hàm tích, ta có  $y'(x) = u'(x)x + u(x)$ .

**Bước 2:** Thay vào phương trình ban đầu ta thu được một phương trình vi phân cấp một  $u'x + u = F(u)$  tách biến được theo  $x$  và  $u$ .

**Bước 3:** Giải phương trình ở Bước 2 theo cách giải phương trình tách biến, ta tìm  $u$ , sau đó thay  $u = \frac{y}{x}$  để tìm  $y$  theo  $x$ .

### 7.2.3 Phương trình vi phân cấp một tuyến tính

Một *phương trình vi phân cấp một tuyến tính* là một phương trình có dạng

$$\frac{dy}{dx} + P(x)y = Q(x).$$

Gọi là tuyến tính là vì bậc cao nhất của  $y$  là 1.

**Ví dụ 7.2.6.** Giải phương trình  $xy' + y = 2x$ .

Chú ý rằng phương trình vi phân này không tách được và cũng không đẳng cấp. Dùng công thức đạo hàm của tích:

$$xy' + y = xy' + x'y = (xy)',$$

nhờ đó chúng ta có thể viết lại phương trình là

$$(xy)' = 2x.$$

Lấy tích phân hai vế phương trình này chúng ta nhận được

$$xy = x^2 + C$$

hay

$$y = x + \frac{C}{x}.$$

Ví dụ trên chỉ ra rằng mỗi phương trình vi phân cấp một tuyến tính có thể được giải một cách tương tự bằng cách nhân hai vế phương trình bởi một hàm thích hợp.

**Cách giải phương trình tuyến tính**

$$\frac{dy}{dx} + P(x)y = Q(x)$$

**Bước 1:** Tính thừa số tích phân

$$\mu(x) = e^{\int P(x)dx}.$$

Ta có  $\mu'(x) = \mu(x)P(x)$ .

**Bước 2:** Nhân hàm  $\mu(x)$  vào hai vế của phương trình vi phân:

$$\mu(x)y'(x) + \mu(x)P(x)y(x) = \mu(x)Q(x).$$

**Bước 3:** Do công thức đạo hàm của tích phương trình được viết lại là

$$(\mu(x)y(x))' = \mu(x)Q(x).$$

**Bước 4:** Lấy nguyên hàm:

$$y(x) = \frac{1}{\mu(x)} \int \mu(x)Q(x)dx.$$

**Ví dụ 7.2.7.** Giải phương trình vi phân  $\frac{dy}{dx} + 3x^2y = 6x^2$ .

Phương trình này là tuyến tính với  $P(x) = 3x^2$  và  $Q(x) = 6x^2$ . Thừa số tích phân là

$$\mu(x) = e^{\int 3x^2 dx} = e^{x^3}.$$

Ở đây ta chỉ cần một nguyên hàm nào đó mà thôi chứ không cần cả một họ nguyên hàm. Nhân hai vế của phương trình với  $e^{x^3}$  chúng ta được

$$\begin{aligned} e^{x^3} \frac{dy}{dx} + 3x^2 e^{x^3} y &= 6x^2 e^{x^3} \\ \frac{d}{dx}(e^{x^3} y) &= 6x^2 e^{x^3} \\ e^{x^3} y &= \int 6x^2 e^{x^3} dx = 2e^{x^3} + C \\ y &= 2 + Ce^{-x^3}. \end{aligned}$$

**Ví dụ 7.2.8.** Tìm nghiệm của bài toán giá trị đầu

$$x^2 y' + xy = 1, \quad x > 0, \quad y(1) = 2.$$



Đầu tiên chúng ta phải chia hai vế cho hệ số của  $y'$  để đưa phương trình vi phân về dạng chuẩn

$$y' + \frac{1}{x}y = \frac{1}{x^2}, \quad x > 0.$$

Thừa số tích phân là

$$\mu(x) = e^{\int \frac{1}{x} dx} = e^{\ln x} = x.$$

Nhân vế của phương trình được cho với  $x$

$$xy' + y = \frac{1}{x}$$

tức là

$$(xy)' = \frac{1}{x}.$$

Từ đó

$$xy = \int \frac{1}{x} dx = \ln x + C$$

và do đó

$$y = \frac{\ln x + C}{x}.$$

Vì  $y(1) = 2$  ta có

$$2 = \frac{\ln 1 + C}{1} = C.$$

Vậy nghiệm của bài toán giá trị đầu là

$$y = \frac{\ln x + 2}{x}.$$

**Ví dụ 7.2.9.** Giải phương trình tăng trưởng dân số (7.1.1)

$$P' = kP.$$

Ta đã giải phương trình này theo phương pháp tách biến ở Ví dụ 7.2.2. Bây giờ viết lại phương trình ở dạng  $P' - kP = 0$  ta lại thấy đây cũng là một phương trình tuyến tính. Nhân hai vế với  $e^{\int -k dt} = e^{-kt}$  ta được

$$e^{-kt} P' - k e^{-kt} P = 0,$$

hay

$$(e^{-kt} P)' = 0.$$

Lấy nguyên hàm ta được  $e^{-kt} P = C$ , hay

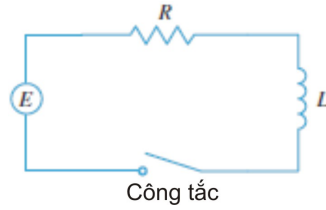
$$P = C e^{kt}.$$

Kết quả này trùng với kết quả thu được ở Ví dụ 7.2.2.

**Ví dụ 7.2.10 (Ứng dụng vào mạch điện).** Một nguồn điện tạo ra một điện áp  $E(t)$  vôn (volt) và một cường độ dòng điện tức thời  $I(t)$  ampe (ampere) tại thời điểm  $t$  trong một mạch điện. Mạch điện còn chứa một điện trở với trở kháng  $R$  ôm (Ohm) và một cuộn cảm với cảm kháng bằng  $L$  henri. Xem Hình 7.2.1.

Theo định luật Ohm độ giảm áp do điện trở gây ra là  $RI$ . Độ giảm áp do cuộn cảm gây ra là  $L(\frac{dI}{dt})$ . Một định luật của Kirchoff nói rằng tổng độ giảm áp chính bằng điện áp tại nguồn  $E(t)$ . Do đó chúng ta có

$$L \frac{dI}{dt} + RI = E(t).$$



Hình 7.2.1: Mạch điện.

Nghiệm là cường độ dòng điện tức thời  $I(t)$  tại thời điểm  $t$ .

Với  $L = 4$ ,  $R = 12$  và  $E(t) = 60$  (đây là trường hợp điện thế không đổi được cung cấp bởi pin chẳng hạn), phương trình trở thành

$$4 \frac{dI}{dt} + 12I = 60,$$

hay

$$\frac{dI}{dt} = 15 - 3I.$$

Ta nhận ra rằng phương trình này là tách biến được, và ta giải nó như sau:

$$\begin{aligned} \int \frac{dI}{15 - 3I} &= \int dt \\ -\frac{1}{3} \ln |15 - 3I| &= t + C \\ |15 - 3I| &= e^{-3(t+C)} \\ 15 - 3I &= \pm e^{-3C} e^{-3t} = Ae^{-3t}. \end{aligned}$$

Vậy nghiệm là

$$I(t) = 5 - \frac{1}{3} Ae^{-3t}.$$

Giả sử thay vì dùng pin chúng ta dùng máy phát điện tạo ra một điện áp thay đổi  $E(t) = 60 \sin 30t$  vôn. Phương trình vi phân trở thành

$$4 \frac{dI}{dt} + 12I = 60 \sin 30t$$

hay

$$\frac{dI}{dt} + 3I = 15 \sin 30t.$$

Đây là một phương trình cấp một tuyến tính. Thừa số tích phân là  $e^{\int 3 dt} = e^{3t}$ , dẫn đến

$$e^{3t} \frac{dI}{dt} + 3e^{3t} I = \frac{d}{dt} (e^{3t} I) = 15e^{3t} \sin 30t.$$

Dùng bảng tích phân hoặc dùng máy tính ta có thể tính được tích phân:

$$e^{3t} I = \int 15e^{3t} \sin 30t dt = 15 \frac{e^{3t}}{909} (3 \sin 30t - 30 \cos 30t) + C.$$

Vậy nghiệm là

$$I(t) = \frac{5}{101} (\sin 30t - 10 \cos 30t) + Ce^{-3t}.$$

## Bài tập

### Phương trình tách biến

7.2.1. Giải các phương trình vi phân:

- (a)  $\frac{dy}{dx} = xy^2$ . (g)  $\frac{dp}{dt} = t^2p - p + t^2 - 1$ .
- (b)  $\frac{dy}{dx} = xe^{-y}$ . (h)  $\frac{dz}{dt} + e^{t+z} = 0$ .
- (c)  $xy^2y' = x + 1$ . (i)  $(x^2 + 4)\frac{dy}{dx} = xy$ .
- (d)  $(y^2 + xy^2)y' = 1$ . (j)  $y' = y^2x^3$ .
- (e)  $(y + \sin y)y' = x + x^3$ . (k)  $\frac{dx}{dt} = x^2 - 2x + 2$ .
- (f)  $\frac{dv}{ds} = \frac{s+1}{sv+s}$ .

**7.2.2.** Tìm nghiệm của phương trình vi phân thỏa điều kiện đầu cho trước.

- (a)  $\frac{dy}{dx} = \frac{x}{y}$ ,  $y(0) = -3$ . (c)  $\frac{dP}{dt} = \sqrt{Pt}$ ,  $P(1) = 2$ .
- (b)  $\frac{dy}{dx} = \frac{\ln x}{xy}$ ,  $y(1) = 2$ . (d)  $\frac{dL}{dt} = kL^2 \ln t$ ,  $L(1) = -1$ .

## Phương trình đẳng cấp

**7.2.3.** Giải các phương trình vi phân:

- (a)  $y' = \frac{y+x}{x}$ . (g)  $y' = \frac{x^2+y^2}{xy}$ ,  $y(1) = 2$ .
- (b)  $y' = \frac{y-x}{x}$ . (h)  $(x^2+y^2)\frac{dy}{dx} + 2x(y+2x) = 0$ .
- (c)  $y' = \frac{2y+x}{x}$ . (i)  $\begin{cases} x^2y'(x) = y^2 - xy + x^2 \\ y(1) = 2. \end{cases}$
- (d)  $y'(x) = \frac{x-y}{x+y}$ . (j)  $y^2 = (xy - x^2)\frac{dy}{dx}$ .
- (e)  $\frac{dy}{dx} = \frac{4x-3y}{x-y}$ . (k)  $\begin{cases} x\frac{dx}{dt} = \frac{x^2+t^2}{t} \\ x(2) = 1. \end{cases}$
- (f)  $\begin{cases} \frac{dy}{dx} = \frac{y-6x}{2x-y} \\ y(0) = 1. \end{cases}$

## Phương trình tuyến tính

**7.2.4.** Giải phương trình vi phân:

- (a)  $y' + y = 1$ . (h)  $(1+t)\frac{du}{dt} + u = 1+t$ ,  $t > 0$ .
- (b)  $y' - y = e^x$ . (i)  $t \ln t \frac{dr}{dt} + r = te^t$ .
- (c)  $y' = x - y$ . (j)  $\frac{dz}{dx} = xz - x$ .
- (d)  $4x^3y + x^4y' = \sin^3 x$ . (k)  $z' - \frac{2}{x}z = \frac{2}{3}x^4$ .
- (e)  $xy' + y = \sqrt{x}$ .
- (f)  $y' + y = \sin(e^x)$ .
- (g)  $x\frac{dy}{dx} - 4y = x^4e^x$ .

**7.2.5.** Giải phương trình vi phân:

- (a)  $y' + 3xy = 4x$ . (c)  $t\frac{du}{dt} = t^2 + 3u$ ,  $t > 0$ ,  $u(2) = 4$
- (b)  $x^2y' + 2xy = \ln x$ ,  $y(1) = 2$ . (d)  $2xy' + y = 6x$ ,  $x > 0$ ,  $y(4) = 20$

- (e)  $(x^2 + 1)\frac{dy}{dx} + 3x(y - 1) = 0$ ,  $y(0) = 2$       (f)  $y' + y \cos x = e^{-\sin x}$ .  
 (g)  $xy'(x) - y(x) = x \ln x$  với  $x > 0$ , và  $y(1) = 2$ .

## Ứng dụng và các bài toán khác

**7.2.6.** Một quần thể vi khuẩn có tăng trưởng số lượng tỉ lệ với số lượng hiện có. Sau 1 giờ có 1000 cá thể vi khuẩn, sau 4 giờ có 3000 cá thể. Hãy tìm số cá thể ở một thời điểm bất kì và số cá thể ở thời điểm ban đầu.

**7.2.7.** Lượng muối trong môi trường đang tăng với tốc độ theo thời gian (tính bằng ngày) tỉ lệ với số lượng hiện có, và gấp đôi sau mỗi tuần. Giả sử số lượng muối ban đầu là 100.000 con, hãy tìm công thức của số lượng muối tại thời điểm bất kì.

**7.2.8 (Mô hình lãi nhập vốn liên tục).** Một tài khoản có lượng tiền ban đầu là  $P$  (gốc). Lãi suất theo thời gian là  $r$ /năm, thường được viết ở dạng phần trăm/năm. Chẳng hạn  $r = 0,05 = 5\%$  có nghĩa là sau 1 năm thì cứ 100 đơn vị tiền tài khoản sẽ nhận được một khoản lãi là 5 đơn vị tiền. Nếu lãi được nhập vào vốn, thì  $r$  chính là tốc độ tăng tương đối của lượng tiền trong tài khoản. Trong mô hình lãi nhập vốn liên tục thì lượng tiền  $A$  ở thời điểm  $t$  (tính bằng năm) thỏa

$$\frac{A'(t)}{A(t)} = r.$$

- (a) Chứng tỏ lượng tiền trong tài khoản được cho bởi

$$A(t) = Pe^{rt}.$$

- (b) Chứng tỏ thời gian cần để lượng tiền trong tài khoản tăng gấp đôi không phụ thuộc vào khoản đầu tư ban đầu.  
 (c) Để lượng tiền tăng gấp đôi mỗi 10 năm thì lãi suất phải bằng bao nhiêu?

**7.2.9 (Phân rã của Carbon  $C^{14}$ ).** Carbon  $C^{14}$  là một chất phóng xạ. Theo hóa học số lượng nguyên tử bị phân rã trong một đơn vị thời gian trên một đơn vị số lượng nguyên tử là không đổi. Như vậy nếu gọi  $C$  là số lượng nguyên tử ở thời điểm  $t$  thì

$$\frac{C'(t)}{C(t)} = k$$

trong đó  $k$  là một số thực không thay đổi theo  $t$ .

- (a) Chứng tỏ

$$C(t) = C_0 e^{kt}$$

trong đó  $C_0 = C(0)$ .

- (b) Người ta biết  $C^{14}$  phân rã theo qui luật số lượng giảm đi phân nửa sau 5730 năm. Từ đó hãy kiểm rằng  $k = -0,00012$ .

**7.2.10 (Định tuổi bằng Carbon).** Carbon  $C^{14}$  được sinh ra trong khí quyển Quả Đất do tác động của tia vũ trụ. Tỉ lệ giữa  $C^{14}$  (phóng xạ) và  $C^{12}$  (không phóng xạ) trong môi trường có thể coi là không thay đổi theo thời gian. Các cơ thể sống trao đổi chất với môi trường nên tỉ lệ giữa  $C^{14}$  và  $C^{12}$  trong cơ thể bằng với tỉ lệ trong môi trường. Khi một cơ thể chết đi, nó không trao đổi chất nữa, lượng  $C^{12}$  không đổi trong khi lượng  $C^{14}$  giảm đi theo thời gian do phóng xạ. Bằng cách đo tỉ lệ  $C^{14}$  còn trong cơ thể người ta có thể suy ra thời điểm mà cơ thể chết. Đây là nguyên lí của phương pháp định tuổi bằng Carbon. Về mặt toán học, nếu biết giá trị của  $\frac{C(t)}{C(0)}$  ta có thể tính được  $t$ .

Năm 1991 người ta phát hiện được một xác người đóng băng trên dãy núi Alps ở Châu Âu, và đo được lượng  $C^{14}$  trong xác ướp này bằng 53% lượng  $C^{14}$  có trong một cơ thể sống. Hãy tính xem xác ướp này bao nhiêu tuổi?

**7.2.11.** Năm 1950 người ta phát hiện ở gần Biển Chết những phần của những cuốn sách viết trên giấy và da có nội dung liên quan tới kinh của người Do Thái cổ. Các nhà khảo cổ xác định được hàm lượng Carbon-14 trong các cuốn sách chỉ còn là 78%. Hãy tính tuổi của các cuốn sách này.

**7.2.12.** Người ta tìm thấy những bánh xe bằng gỗ của các chiến xa do ngựa kéo ở Kazakhstan. Hàm lượng Carbon-14 trong gỗ chỉ còn bằng 62.5% so với hàm lượng trong cây sống. Hãy tính tuổi của các bánh xe này.

**7.2.13.** Dân số loài người là 5,28 tỉ người vào năm 1990 và 6,07 tỉ người vào năm 2000. Giả thiết rằng do các hạn chế về tài nguyên, Quả Đất không thể đủ chỗ cho quá 10 tỉ người. Hãy dùng mô hình tăng trưởng dân số có kim hãm để dự đoán dân số thế giới vào năm 2025.

**7.2.14.** Giải phương trình của sự học ở Bài tập 7.1.8

$$P' = k(M - P).$$

Hãy vẽ đường cong nghiệm.

**7.2.15.** Giải phương trình của sự nguội ở Bài tập 7.1.7. Hãy vẽ đường cong nghiệm.

**7.2.16.** Một vật nóng được để nguội trong môi trường có nhiệt độ là  $30^\circ$ . Sau 10 phút ta đo được nhiệt độ của vật là  $50^\circ$  và sau 20 phút thì nhiệt độ của vật là  $40^\circ$ . Dùng mô hình phương trình vi phân của sự nguội, hãy tính nhiệt độ ban đầu của vật và sau bao lâu thì nhiệt độ của vật còn là  $35^\circ$ ?

**7.2.17.** Trong mạch điện được cho ở Hình 7.2.1 tìm cường độ dòng điện tức thời  $I(t)$  và vẽ đồ thị của nó (có thể dùng máy tính) trong các trường hợp:

- (a) Một pin cung cấp một điện áp không đổi 40 vôn, cảm kháng là 2 henri, trở kháng là 10 ôm và  $I(0) = 0$ .
- (b) Một máy phát điện cung cấp một điện áp  $E(t) = 40 \sin 60t$  vôn, cảm kháng là 1 henri, trở kháng là 20 ôm và  $I(0) = 1$  ampe.

**7.2.18.** Một *phương trình vi phân Bernoulli* là phương trình có dạng

$$\frac{dy}{dx} + P(x)y = Q(x)y^n.$$

Nếu  $n = 0$  hoặc  $n = 1$  thì phương trình Bernoulli là tuyến tính. Với  $n$  nhận những giá trị khác, phép thế  $u = y^{1-n}$  biến đổi phương trình Bernoulli thành phương trình tuyến tính

$$\frac{du}{dx} + (1-n)P(x)u = (1-n)Q(x).$$

Dùng phương pháp trên để giải các phương trình vi phân sau:

- (a)  $xy' + y = -xy^2$ . (b)  $y' + \frac{2}{x}y = \frac{y^3}{x^2}$ .

**7.2.19.** Một phương trình vi phân

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-P(x, y)}{Q(x, y)}$$

có thể được viết lại là

$$Pdx + Qdy = 0,$$

và được gọi là một *phương trình vi phân toàn phần*, hay một phương trình vi phân khớp (exact), nếu

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}.$$

Ta tìm một hàm  $f(x, y)$  sao cho

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x} = P \\ \frac{\partial f}{\partial y} = Q. \end{cases}$$

khi đó phương trình ẩn  $f(x, y) = C$ , với  $C \in \mathbb{R}$  là một hằng số, xác định một nghiệm của phương trình vi phân.

Dùng phương pháp trên để giải các phương trình vi phân sau:

(a)  $y' = \frac{-2xy}{1+x^2}$ .

(c)  $y' = \frac{2+ye^{xy}}{2y-xe^{xy}}$ .

(b)  $y' = \frac{-y^2}{2xy+1}$ .

(d)  $y' = -\frac{x^2+y+1}{x+y+y^3}$ .

**7.2.20.** Một *phương trình tích phân* là một phương trình chứa một ẩn hàm  $y(x)$  và một tích phân chứa  $y(x)$ . Giải phương trình tích phân sau. (*Hướng dẫn:* Lấy đạo hàm và sử dụng một điều kiện đầu thu được từ phương trình tích phân.)

(a)  $y(x) = 2 + \int_2^x [t - ty(t)]dt.$

(b)  $y(x) = 4 + \int_0^x 2t\sqrt{y(t)}dt.$

## Tài liệu tham khảo

- [Apo67] Tom Apostol, *Calculus*, 2nd ed., John Wiley and Sons, 1967.
- [Bmgt2] Bộ môn Giải tích, *Giáo trình Phép tính vi tích phân 2*, Khoa Toán-Tin học Đại học Khoa học Tự nhiên Thành phố Hồ Chí Minh, <http://www.math.hcmus.edu.vn/giaitich>.
- [Boyce09] William E. Boyce and Richard C. DiPrima, *Elementary Differential Equations and Boundary Value Problems*, 9th ed., John Wiley and Sons, 2009.
- [Duc06] Dương Minh Đức, *Giáo trình Toán Giải Tích 1 (Toán vi tích phân A1)*, NXB Thống kê, Tp. Hồ Chí Minh, 2006.
- [Fic77] G. M. Fichtengôn, *Cơ sở Giải tích toán học*, NXB Đại học và Trung học chuyên nghiệp, 1977.
- [GeoG] GeoGebra, có phiên bản trên web, trên máy tính, và trên điện thoại: <https://www.geogebra.org>, phần mềm miễn phí, dễ dùng.
- [Kha96] Phan Quốc Khánh, *Phép tính vi tích phân*, tập 1, Nhà Xuất Bản Giáo dục, 1996.
- [Lan97] Serge Lang, *Undergraduate analysis*, 2nd ed., Springer, 1997.
- [Long] Nguyễn Thành Long, *Giáo trình Giải tích A4*, Khoa Toán-Tin học Đại học Khoa học Tự nhiên Thành phố Hồ Chí Minh.
- [Maxi] Maxima, có ở <http://maxima.sourceforge.net>, phần mềm mã nguồn mở, kích thước nhỏ.
- [Rud76] Walter Rudin, *Principles of mathematical analysis*, 3rd ed., McGraw-Hill, 1976.
- [Spi94] Michael Spivak, *Calculus*, 3rd ed., Publish or Perish, 1994.
- [Ste16] James Stewart, *Calculus*, Brooks-Cole, 8th ed., 2012. Có bản dịch tiếng Việt cho lần xuất bản thứ 7, Nhà xuất bản Hồng Đức 2016.
- [TPTT02] Đinh Ngọc Thanh, Nguyễn Đình Phư, Nguyễn Công Tâm, Đặng Đức Trọng, *Giải tích hàm một biến*, Nhà Xuất Bản Giáo dục, 2002.
- [Tri07] Nguyễn Đình Trí, Tạ Văn Đĩnh, Nguyễn Hồ Quỳnh, *Toán học cao cấp*, NXB Giáo dục, 2007.
- [Wolf] Wolfram Alpha, Giao diện web miễn phí ở <https://www.wolframalpha.com>.
- [Zor04] Vladimir A. Zorich, *Mathematical Analysis I*, Springer, 2004.

# Chỉ mục

- inf, 7
- ln, 14
- sup, 7
- e, 13
- ánh xạ, 2
  - ánh xạ ngược, 3
  - đơn ánh, 3
  - toàn ánh, 3
- Định Lý Rolle, 57
- Định lý Cơ bản của Phép tính vi tích phân, 79
- Định lý Fermat, 53
- Định lý giá trị trung bình Cauchy, 58
- Định lý giá trị trung gian, 33
- Định lý kẹp, 10
- đồ thị, 14
- độ nghiêng, 14
- động năng, 99
- đạo hàm, 38
- đạo hàm của hàm số ngược, 47
- định tuổi bằng Carbon, 136
- đường thẳng, 14
- điểm cực trị, 53
- điểm dừng, 55
- điểm giới hạn, 20
- điểm tới hạn, 55
- điểm tụ, 20
- điểm uốn, 63
  
- bài toán giá trị đầu, 122
- bài toán tối ưu hoá, 53
- bị chặn
  - bị chặn dưới, 6
  - bị chặn trên, 6
  - bị chặn, giới nội, 6
- biên dưới, 7
- biên trên, 7
  
- công thức Maclaurin, 117
- công thức Newton–Leibniz, 80
- công thức Taylor, 117
  
- cận dưới, 7
- cận trên, 7
- cực đại địa phương, 53
- cực đại tương đối, 53
- cực đại toàn cục, 53
- cực đại tuyệt đối, 53
- cực tiểu địa phương, 53
- cực tiểu tương đối, 53
- cực tiểu toàn cục, 53
- cực tiểu tuyệt đối, 53
- cực trị, 53
- chặn
  - chặn dưới, 6
  - chặn trên, 6
- chuỗi
  - phân kỳ, 108
  - tổng, 108
- chuỗi đan dấu, 114
- chuỗi hàm, 116
- chuỗi Maclaurin, 117
- chuỗi số, 108
- chuỗi số dương, 110
- chuỗi Taylor, 117
  
- dạng phản đảo, 5
- dãy
  - bị chặn, 7
  - giới hạn, 8
  - giới nội, 7
  - hội tụ, 8
  - phân kỳ, 8
  - tập giá trị, 7
  - tiến về, 8
- dãy đơn điệu, 7
- dãy con, 105
- dãy giảm, 7
- dãy tăng, 7
  
- giới hạn bên phải, 25
- giới hạn bên trái, 25
- giới hạn hàm số, 20



- giới nội, 6
- giá trị lớn nhất, 53
- giá trị nhỏ nhất, 53
- gián đoạn, 30
  
- hàm giảm, 60
- hàm giảm ngắt, 60
- hàm hợp, 14
- hàm lồi, 62
- hàm lõm, 62
- hàm mật độ, 98
- hàm số, 12
- hàm số sơ cấp, 14
- hàm số tuyến tính, 14
- hàm tăng, 60
- hàm tăng ngắt, 60
- hệ số góc, 14
- hệ số góc của tiếp tuyến, 39
- hội tụ tuyệt đối, 114
  
- khả tích, 76
- khả vi, 38
  
- liên tục, 30
  
- mô hình của sự học, 127
- mô hình của sự nguội, 127
- mô hình hậu cần, 125
- mô hình lãi nhập vốn liên tục, 136
- mô hình tăng trưởng dân số, 124
- mô hình tăng trưởng dân số có kìm hãm, 125
- mệnh đề đảo, 5
- miền xác định, 2
  
- nghiệm cân bằng, 125
- nguyên hàm, 77
  
- phép đổi biến, 82
- phép phản chứng, 5
- phép thế, 82
- phân kỳ ra vô cực, 9
- phân rã của Carbon  $C^{14}$ , 136
- phần tử lớn nhất, 6
- phần tử nhỏ nhất, 6
- phương trình vi phân
  - Bernoulli, 137
  - toàn phần, 137
  - trường vectơ, 123
- phương trình vi phân cấp một tuyến tính, 131
- phương trình vi phân cấp một đẳng cấp, 130
- phương trình vi phân cấp một tách biến, 127
  
- Qui tắc điểm giữa, 89
- Qui tắc hình thang, 89
- Qui tắc Simpson, 90
- Quy tắc mắc xích, 46
  
- song song, 14
  
- tích chập, 95
- tích phân, 75
- tích phân bất định, 77
- tập hợp
  - giao, 2
  - hợp, 2
  - hiệu, 2
  - miền giá trị, 3
  - phần bù, 2
  - tích, 2
- tập hợp rỗng, 1
  
- vô cùng, 9, 26
- vô cực, 9, 26
- vô hạn, 9, 26
- vận tốc, 39